

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD

Centre d'Orsay

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN SCIENCES

Spécialité : Mathématiques Appliquées
et Applications des Mathématiques

par

Jérôme COLLET

Sujet : La modélisation des durées de réparation
pour les études de sûreté de fonctionnement

soutenue le lundi 11 décembre 2000 devant le jury composé de

M. Jean BRETAGNOLLE	Président
M. Jean-Louis BON	Directeur
M. Pierre BERNARD	Rapporteur
M. Dimitru IONESCU	Rapporteur
M. Michel GONDRAN	Examineur
M. Michel ROUSSIGNOL	Examineur

Remerciements

J'adresse mes plus vifs remerciements :

- au département Études de Sûreté et de Fiabilité, qui a cru à cette thèse, l'a permise et encadrée ;
- à Jean-Louis Bon, qui m'a guidé tout au long de la thèse, avec un enthousiasme et une disponibilité de tous les instants ;
- à Jean Bretagnolle, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse ;
- à Pierre Bernard et Dimitru Ionescu, qui, en qualité de rapporteurs, ont étudié minutieusement mon travail ;
- à Michel Roussignol et Michel Gondran, qui ont accepté d'évaluer cette thèse ;
- Marc Bouissou, Éric Bourgade, Sylvain Deriot, Gérard Labadie, Patrick Pamphile et Olivier Pourret, dont les relectures, remarques et demandes m'ont été très utiles ;

et à tous ceux qui, au travers de discussions et conseils, ont contribué de manière parfois décisive à l'avancement de cette thèse.

Table des matières

1	Introduction	9
2	La modélisation liée aux études de sûreté de fonctionnement	13
2.1	Introduction	14
2.1.1	Effets de l'ordre de grandeur des probabilités de défaillance des composants	14
2.1.2	Utilisation des études de sûreté de fonctionnement : sûreté ou conception	14
2.1.3	Présence ou absence d'interactions temporelles entre composants	14
2.2	Typologie des modèles	15
2.2.1	Modèles structurels	16
2.2.2	Modèles comportementaux markoviens, avec réparations, sur longue durée	19
2.2.3	Autres modèles comportementaux	21
2.3	Cas des télécommunications	22
3	Modèles à réparations vieillissantes	23
3.1	Considérer les temps de réparations comme vieillissants	24
3.1.1	Que savons-nous des réparations?	24
3.1.2	Objections	25
3.1.3	Conclusion	26
3.2	Les différents ordres portant sur des variables aléatoires	26
3.2.1	Les ordres intégraux	26
3.2.2	Ordre dispersif	27
3.2.3	Propriétés des ordres sur les variables aléatoires	27
3.3	Les notions de vieillissement	28
3.3.1	Définitions à partir du taux de défaillance	28
3.3.2	Définitions à partir du temps résiduel	28
3.3.3	Définitions par comparaison avec l'exponentielle de même moyenne	29
3.3.4	Propriétés des classes de vieillissement	29
3.4	Cadre de l'étude	30
3.4.1	L'ordre convexe	30
3.4.2	Les pseudo-variables	30
3.4.3	La classe HNBUE	32
4	Quelques études de sûreté de fonctionnement	35
4.1	Cas asymptotique	36
4.1.1	Systèmes à composants indépendants	36

4.1.2	Exemple de système à composants «dépendants»	36
4.1.3	Cas où un temps de réparation n'est pas vieillissant	39
4.1.4	Conclusion	40
4.2	Temps fini	40
4.3	Dépendances «faibles»	41
4.3.1	Modélisation des tests	41
4.3.2	Pannes de courte durée admissibles	43
5	Probabilité des séquences de panne	45
5.1	Introduction	47
5.1.1	Exemples	47
5.1.2	Résultats préliminaires	48
5.1.3	Cas i.i.d.	51
5.1.4	Une première majoration	52
5.2	Construction d'une famille extrémale	54
5.3	Encadrements	57
5.3.1	Majoration	57
5.3.2	Minoration	59
5.3.3	Calcul pratique de la fonction p_m pour la minoration	61
5.3.4	Représentation graphique	67
5.4	Utilisation pour un calcul de séquence	67
5.4.1	Résultats	67
5.4.2	Application	71
5.5	Voies alternatives, perspectives	72
6	Utilisation pour des calculs pratiques de fiabilité et disponibilité	75
6.1	Modèle	76
6.1.1	Définition du processus étudié	76
6.1.2	Hypothèses spécifiques	77
6.2	Approximation lent-rapide	78
6.2.1	Construction d'un processus réduit	78
6.2.2	Approximation	79
6.2.3	Réduction aux séquences sans réparation réussie	80
6.3	Validation des approximations	80
6.3.1	Un exemple de problème posé par les lois HNBUE	81
6.3.2	Voies de recherche possibles	82
7	Exemples	83
7.1	Récapitulatif des résultats	84
7.2	Un système d'alimentation électrique secourue	85
7.2.1	Description du système	85
7.2.2	Étude du système	86
7.2.3	Une variante où le nombre de réparateurs est fini	88
7.3	Un parc de pièces détachées	88
7.4	Une séquence d'une EPS nucléaire	90
7.4.1	Introduction	90
7.4.2	Encadrement de la probabilité de perte de l'alimentation de secours	90

	7
7.4.3	Prise en compte de la récupération par l'opérateur 91
7.4.4	Étude de sensibilité 92
8	Conclusion 93
9	Annexes 95
9.1	Mise en œuvre des calculs pour le calcul de la fonction p_m 96
9.1.1	Équations à résoudre 96
9.1.2	Résultats 97
9.2	Fichiers Maple 97
9.2.1	Calcul de la disponibilité d'un composant à temps de réparation déter- ministe 97
9.2.2	Calcul des bornes pour le premier exemple du paragraphe 5.1.1 97
9.2.3	Limite en 1 de p_m 98
9.2.4	Calcul de b_{limite} 99
9.2.5	Calcul de p_m 100
9.2.6	Traitement du système d'alimentation électrique secourue 101
10	Bibliographie 105
11	Notations 111

Chapitre 1

Introduction

Les systèmes industriels les plus complexes présentent des risques qu'il est nécessaire de maîtriser. C'est pourquoi ils comportent de nombreuses redondances (plusieurs équipements peuvent se secourir pour remplir une mission), des systèmes de secours, etc. Grâce à cela, la panne et l'accident deviennent des événements rares.

Du même coup, il devient difficile de prouver la rareté de ces événements, et surtout de mesurer d'éventuels progrès dans cette rareté. En effet, la plupart du temps, ces systèmes n'ont aucune panne et aucun accident, ce qui est insuffisant pour estimer par des méthodes statistiques la fiabilité (probabilité de bon fonctionnement du système sur une période de temps donnée), la disponibilité (probabilité de bon fonctionnement du système à une date donnée) et la sécurité (probabilité que le système ne provoque pas d'accident) de ces systèmes.

Il est donc nécessaire d'adopter une autre démarche, dite de sûreté de fonctionnement prévisionnelle. Elle repose sur un découpage du système en composants, et utilise d'une part une connaissance statistique sur les aléas affectant ces composants, d'autre part une connaissance déterministe sur le fonctionnement du système.

- La connaissance statistique doit nous permettre, pour chaque composant du système, de calculer la probabilité qu'il soit dans un état donné, en fonction des caractéristiques de son environnement.
- La connaissance déterministe doit nous permettre, connaissant l'état des composants du système, de savoir si le système est en marche ou en panne, si un accident s'est produit, etc.
- Le découpage en composants doit donc respecter les deux contraintes ci-dessus. Le niveau de détail de ce découpage dépendra essentiellement de la disponibilité de données de retour d'expérience : pour simplifier, est considéré comme «composant» ce sur quoi nous disposons de données de retour d'expérience.

Remarque : La situation décrite est relativement proche de celle des études de performance. En effet, dans le cas d'une étude de performance, on dispose de données sur les temps de service et les temps entre arrivées de tâches, on sait dans quels cas le système est saturé, quelle est sa productivité dans chaque état, et on veut obtenir des renseignements de nature probabiliste sur les performances de ce système : productivité moyenne, probabilité de saturation, etc. C'est pourquoi la plupart des résultats théoriques établis ici peuvent être transposés efficacement dans le cas de l'analyse de performances.

Puisque nous prévoyons la sûreté de fonctionnement d'un système à partir de connaissances forcément partiellement hypothétiques, toute erreur dans ces hypothèses amène à une erreur dans les prévisions. Il est donc indispensable de modéliser, évaluer et propager l'incertitude sur les hypothèses de nos études. Les méthodes utilisées dépendront de l'origine de ces incertitudes.

1. Dans le cas où l'évènement étudié est l'accident, une source importante d'incertitude est notre méconnaissance des scénarios accidentels. En effet, lors d'un accident, les composants du système sont dans un environnement très anormal, et réagissent donc d'une manière parfois imprévisible. Donc, même pour un scénario accidentel connu, il peut y avoir des incertitudes sur la résistance de certains composants. De plus, il peut arriver que l'accident se déroule selon un scénario imprévu.

Dans la plupart des cas, la propagation de ces incertitudes se ramène à une étude de sensibilité : pour chacune de ces hypothèses, on évalue la probabilité d'accident dans le meilleur et le pire des cas. Comme ces incertitudes affectent en général des hypothèses

peu nombreuses, mais importantes, cette méthode simple et exhaustive est bien adaptée.

2. Les incertitudes peuvent aussi concerner les connaissances statistiques sur le facteur humain, le logiciel, les défaillances de cause commune.
 - Dès qu'un opérateur humain intervient dans le système étudié, il est nécessaire de connaître la probabilité qu'il fasse des erreurs, soit dans la conduite normale du système, soit dans la récupération des incidents affectant le système. C'est l'objet des études prévisionnelles de fiabilité humaine.
 - De même, il est nécessaire d'étudier la fiabilité du logiciel.
 - Lorsque des composants du système se ressemblent, par leur conception, leur localisation, leur maintenance, etc., modéliser leurs défaillances comme des événements statistiquement indépendants devient intenable. Il est donc indispensable d'étudier la dépendance statistique entre ces événements, ce qui revient à quantifier «à quel point ils se ressemblent». C'est ce que l'on appelle l'étude des défaillances de cause commune.

Là aussi, la propagation des incertitudes se ramène à des études de sensibilité.

3. Il reste le cas des données statistiques sur les composants, considérés individuellement. Le retour d'expérience sur les composants servant généralement à l'estimation de paramètres (par exemple le taux de défaillance), l'incertitude se décompose en deux types : l'incertitude sur les paramètres estimés, et l'incertitude sur l'adéquation du modèle paramétrique.

- L'incertitude sur les paramètres estimés intervient très souvent dans une étude, puisqu'elle intervient pour chaque composant du système. De plus, puisqu'elle provient d'une estimation statistique, il est assez naturel de la modéliser comme un aléa, suivant une certaine loi de probabilité. Cela autorise un traitement global et automatisé de ces incertitudes, par simulation de Monte-Carlo : on réévalue de nombreuses fois le résultat de l'étude (que ce résultat soit une fiabilité, une disponibilité ou une sécurité), en ayant tiré au hasard les paramètres. La répartition des résultats obtenus donne alors une idée de l'incertitude pesant sur le résultat.
- En revanche, il existe peu de méthodes pour évaluer l'impact de l'incertitude sur l'adéquation des modèles utilisés pour l'estimation des paramètres de fiabilité. Il faut néanmoins distinguer deux types de données : celles concernant les temps de bon fonctionnement (les durées de vie), et celles concernant les temps ou durées de réparation. En ce qui concerne les temps de bon fonctionnement, pour des systèmes bien entretenus, il est assez naturel de supposer que les temps de bon fonctionnement suivent une loi exponentielle, autrement dit que le vieillissement des matériels est négligeable sur la période d'étude. L'incertitude sur l'adéquation du modèle paramétrique est donc faible. On peut néanmoins noter que Kovalenko [1, 29] a récemment étudié la propagation de cette incertitude.

La situation est tout autre pour les temps de réparation, d'abord parce qu'il n'existe pas de consensus sur la loi que suivent ces temps. La seule possibilité, quand les méthodes de calcul utilisées le permettent, est une étude de sensibilité sur cette loi. Cette méthode n'est cependant pas satisfaisante, puisque nous ne savons pas, pour ces lois, quels sont le pire et le meilleur des cas. L'étude de sensibilité ne serait donc acceptable que si elle était exhaustive, ce qui est impossible, puisqu'il existe une infinité (de plus non dénombrable) de lois de temps de réparation possibles. Il est vrai que, dans la plupart des cas, on constate que l'impact sur le résultat de l'étude est très

limité. Néanmoins, sans justification de cette constatation, il serait imprudent de s'y fier dans tous les cas.

Il apparaît donc que la propagation de l'incertitude sur la loi des temps de réparation est un problème ouvert. Or, ces temps de réparations sont une donnée fondamentale de nombreux problèmes, comme les problèmes d'optimisation des stocks de pièces de rechange. Ces stocks servent à donner le temps d'effectuer les réparations de pièces défectueuses, sans craindre d'avoir à arrêter la production. L'optimisation est donc un compromis entre le coût du stock d'une part, et le coût d'un arrêt de la production d'autre part. Or, l'arrêt de la production a lieu quand une série de pannes a été plus rapide que les réparations en cours : il est donc clair que la durée des réparations est une donnée fondamentale de ce problème. Il paraît par conséquent utile d'étudier l'influence de l'incertitude portant sur cette donnée.

Le chapitre suivant esquisse un état de l'art : en effet, l'incertitude sur la loi des temps de réparations ne se propagera pas de la même manière selon les modèles utilisés. Nous proposons ensuite une modélisation des temps de réparation, à l'aide de la notion de vieillissement. Nous utilisons cette modélisation dans quelques cas simples (chapitre 4). Nous identifions ainsi des cas dans lesquels l'incertitude sur la loi des temps de réparations n'a aucune influence sur la fiabilité et la disponibilité, et des cas dans lesquels cette influence existe : c'est sur ces problèmes que porte la suite de l'étude. Par ailleurs, nous étudions deux problèmes dérivés de problèmes réels, dans lesquels l'influence de la loi des temps de réparations est particulièrement simple à étudier.

Pour la suite de l'étude, dans le chapitre 5, qui représente l'essentiel de l'apport de la thèse, nous nous concentrons sur les séquences monotones (séquences de défaillances sans aucune réparation réussie). Nous encadrons la probabilité de ces séquences. Nous décrivons ensuite un modèle permettant l'utilisation de ces encadrements (chapitre 6). Ces résultats nous permettent ensuite, dans le chapitre 7, de donner pour la première fois une mesure précise de l'influence de l'incertitude sur la loi des temps de réparation.

Chapitre 2

La modélisation liée aux études de sûreté de fonctionnement

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous décrivons les principaux modèles théoriques existants, car la méthode de propagation de l'incertitude sur la loi des temps de réparation dépendra du modèle théorique utilisé. Ces modèles sont le résultat d'une activité importante, depuis les années 1960. On peut citer par exemple [21, 4] (le deuxième ouvrage étant une réédition d'un ouvrage de 1972). L'article [50] est un historique du développement de cette discipline. Il est nécessaire de faire quelques remarques préliminaires.

2.1.1 Effets de l'ordre de grandeur des probabilités de défaillance des composants

Si ces probabilités sont faibles, il sera possible d'utiliser de nombreuses approximations, que l'on peut désigner globalement par «approximation des évènements rares». Ces approximations consistent, la plupart du temps, à ne prendre en compte que les combinaisons minimales de pannes de composants, parmi celles qui conduisent à la panne du système. Toutes les autres combinaisons de pannes sont décrites de manière assez rustique, sans détails. Ces approximations ont deux avantages, liés mais distincts : elles simplifient les calculs, mais aussi leur restitution à l'utilisateur (les calculs étant généralement effectués par ordinateur). Ces approximations sont utilisées dans le cas de modèles booléens [15], de modèles logiques plus généraux [40], voire de modèles comportementaux [47].

Dans le cas des études de performances, la probabilité de défaillance des composants correspond au rapport classique temps de service / temps inter-arrivées. Dans ce cadre, on retrouve les mêmes conclusions.

Dans la suite, nous ne nous intéressons qu'au cas de faibles probabilités de défaillance des composants du système (de faibles rapports temps de service / temps inter-arrivées).

2.1.2 Utilisation des études de sûreté de fonctionnement : sûreté ou conception

Dans le cadre d'une étude de sûreté de fonctionnement à la conception, il est indispensable de disposer d'encadrements de la probabilité de défaillance du système. En effet, l'objectif de ces études est de comparer des architectures de systèmes, du point de vue de la sûreté de fonctionnement : seuls des encadrements (disjoints) permettent d'effectuer ces comparaisons. En revanche, dans le cas d'études de sûreté, il est possible de se contenter d'une majoration de la probabilité de défaillance (ou d'accident). En effet, pour prouver qu'un système atteint un objectif de sûreté, il suffit de prouver qu'une majoration de cette probabilité est inférieure à cet objectif de sûreté.

La majoration est souvent mieux étudiée que la minoration, d'abord à cause de l'importance des problèmes de sûreté, mais aussi parce que les résultats de majoration s'obtiennent souvent plus facilement. Néanmoins, la minoration est une information importante, que nous nous sommes efforcés d'obtenir dans la suite de l'étude, au prix de certaines difficultés techniques.

2.1.3 Présence ou absence d'interactions temporelles entre composants

On considère qu'il y a interaction temporelle entre deux composants d'un système si l'état de l'un des composants à la date t dépend de l'état de l'autre, à au moins une date $s < t$. La

présence d'interactions temporelles entre les composants d'un système en complique beaucoup l'étude.

Principaux types d'interactions Les trois types les plus courants d'interactions entre composants sont les défaillances de cause commune, les interactions dues à la limitation des ressources nécessaires pour les réparations et les redondances passives.

Les défaillances de cause commune ne sont pas, la plupart du temps, considérées comme des interactions temporelles. En effet, une défaillance de cause commune est censée faire effet quasi instantanément. Il n'y a donc pas de retard entre la défaillance d'un composant et la défaillance des autres composants affectés par la même cause commune.

En revanche, la limitation des ressources nécessaires pour les réparations est clairement une interaction temporelle. Nous traiterons ici le cas où les réparations commencées sont prioritaires.

Le troisième type d'interaction est la redondance passive, qui nécessite un cadre mathématique différent de la redondance dite active, car c'est une interaction temporelle. On dit qu'un composant A est en *redondance passive* d'un composant B si A démarre quand B est en panne.

Dans quels cas peut-on s'attendre à rencontrer des interactions temporelles ?

Considérons le cas d'une alimentation électrique secourue. Deux types de stratégies peuvent y être associés. Dans le premier, on considère que, étant donnés les coûts relatifs de l'électricité fournie par le réseau et de celle fournie par le groupe électrogène, il faut utiliser en temps normal le réseau, et ne démarrer le groupe électrogène qu'en cas de panne du réseau. Dans le second, on considère que les défaillances à la sollicitation des groupes électrogènes sont trop dangereuses : en fonctionnement normal, l'électricité est fournie par le groupe électrogène, et le réseau sert en cas de panne du groupe. La première stratégie sera privilégiée si l'évènement indésirable est peu critique (autrement dit peu coûteux), la seconde dans le cas contraire. Les arguments utilisés ici pour justifier l'une ou l'autre des stratégies peuvent être généralisés : l'utilisation d'un matériel de secours est **toujours** plus coûteuse que celle d'un matériel normal, les démarrages d'urgence, les reconfigurations etc. sont **souvent** causes de défaillances. Par ailleurs, ce critère de criticité l'évènement indésirable est intéressant aussi pour les ressources nécessaires aux réparations : elles seront limitées dans le cas d'un évènement indésirable peu critique, illimitées sinon.

On peut donc s'attendre à rencontrer des interactions temporelles dès que l'évènement indésirable est peu critique.

2.2 Typologie des modèles

Parmi les modèles utilisés pour la sûreté de fonctionnement des systèmes, on distingue deux catégories : les modèles dits «structurels» (ou «statiques») et ceux dits «comportementaux» (ou «dynamiques»).

Les modèles structurels ne permettent pas de prendre en compte des interactions temporelles, ce que permettent les modèles comportementaux. Cependant, en contrepartie de leur plus grande souplesse, les modèles comportementaux sont souvent plus difficiles à traiter : une fois le modèle écrit, obtenir une valeur de la fiabilité ou de la disponibilité est difficile.

2.2.1 Modèles structurels

Il faut ici distinguer ici le cas de composants indépendants du cas à composants dépendants. Dans le cas où le temps est fixé, et où les composants ont un nombre d'états fini, considérer n composants indépendants revient à supposer :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, i \neq j \Rightarrow \mathbb{P}(X_i = x_i \mid X_j = x_j) = \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

où X_i est la variable aléatoire décrivant l'état du composant i . Le problème du calcul des $\mathbb{P}(X_i = x_i)$ n'est pas ici évoqué, car il est la plupart du temps facile, le nombre d'états de chaque composant étant faible. Ce qui fait la difficulté du problème vient du nombre de composants et de leur action sur le système.

Composants indépendants

Dans le cas le plus simple, nous étudions un système à deux états, formée de n composants eux aussi à deux états, les composants étant indépendants entre eux. Ces modèles sont à la base de la plupart des études faites dans l'industrie. La littérature à leur sujet est très riche, on pourra par exemple consulter [31, 44].

Le cas de composants indépendants à plus de deux états ne nécessite pas de développement particulier, pour les raisons suivantes :

- le cas des composants à deux états est assez courant,
- les méthodes évoquées au paragraphe suivant, sur les composants dépendants, permettent aussi la prise en compte de composants à plusieurs états, sans perte importante d'efficacité.

Le système, ainsi que les composants, peuvent être en marche (notée 1) ou en panne (notée 0). L'évolution de chacun des composants est un processus à valeur dans $\{0, 1\}$, considéré comme une algèbre de Boole, avec la relation d'ordre définie par $0 \leq 1$. On note :

- X_i l'état du composant i et X le vecteur des X_i ,
- Φ la fonction de structure du système, c'est une fonction de $\{0, 1\}^n$ dans $\{0, 1\}$.

La disponibilité du système, noté A , est la probabilité que le système soit en marche. Par conséquent :

$$A = \mathbb{P}(\Phi(X) = 1)$$

Théoriquement, ce calcul est très simple. Les composants étant indépendants, pour tout état $x \in \{0, 1\}^n$, on a :

$$\mathbb{P}(X = x) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Donc :

$$A = \sum_{x \in \{0, 1\}^n} \Phi(x) \times \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

A priori, il suffit donc de calculer chacun des termes $\mathbb{P}(X_i = x_i)$, puis, pour chacune des valeurs de x , d'évaluer $\Phi(x)$, de faire les produits correspondants, puis la somme de tous ces termes.

Il se trouve néanmoins que cette méthode est impraticable, à cause du très grand nombre

d'états de la plupart des systèmes courants. Par exemple, il est actuellement courant de modéliser des systèmes comportant une centaine de composants. Si l'étude de ce genre de système était faite avec la méthode ci-dessus, cela nécessiterait de l'ordre de 10^{32} multiplications, ce qui est évidemment impossible.

Nous devons faire efficacement des calculs sur un espace discret relativement simple, mais très grand : l'essentiel du travail consiste donc à représenter cet espace de manière concise et permettant des calculs de probabilité.

La tâche est rendue possible par les deux propriétés suivantes : les probabilités de défaillance des composants sont généralement petites, et les systèmes étudiés sont cohérents, conformément à la définition suivante.

Définition 2.2.1 *La fonction Φ est dite cohérente (et le système qu'elle représente sera dit cohérent) si elle vérifie :*

- la fonction Φ est croissante, c'est à dire que si $\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i \leq y_i$, alors $\Phi(x) \leq \Phi(y)$,
- tous les composants ont un rôle :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \exists (x_j)_{j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i}, \Phi(x_1, \dots, 0, \dots, x_n) \neq \Phi(x_1, \dots, 1, \dots, x_n)$$

À partir de là, plusieurs méthodes de traitement sont utilisées (en général avec succès).

Traitement par recherche des coupes On représente ici l'ensemble des états de panne du système à l'aide de la notion de coupe minimale (voir [31]) :

Définition 2.2.2 *une coupe est un ensemble de composants dont la défaillance conduit à la panne du système, quel que soit l'état des autres composants. Une coupe minimale est une coupe qui ne contient pas d'autre coupe.*

Dans le cas d'un système cohérent, il existe un unique ensemble de coupes minimales. De plus, de nombreux algorithmes existent, permettant de rechercher ces coupes de manière efficace [43, 25].

La probabilité que tous les composants d'une coupe soient en panne est le produit des probabilités de défaillance des composants, grâce à l'hypothèse d'indépendance. Il reste alors à calculer la probabilité de l'union de toutes les coupes. Ce calcul est théoriquement possible à l'aide de la formule de Poincaré, mais utiliser ce développement jusqu'au bout est impraticable. C'est pourquoi on se contente généralement du premier terme de ce développement, soit la somme des probabilités des coupes, encore appelée «approximation des événements rares». On montre (cf. [15]) que cette approximation est bonne, tant que les probabilités de défaillance des composants sont petites.

Traitement par construction d'un Diagramme de Décision Binaire À partir de la fonction booléenne Φ , on peut écrire une décomposition de Shannon par rapport à une variable x_i :

$$\Phi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = \neg x_i \cdot \Phi(x_1, \dots, 0, \dots, x_n) + x_i \cdot \Phi(x_1, \dots, 1, \dots, x_n)$$

Si on s'est donné un ordre σ des n variables x_i , on peut répéter cette décomposition sur toutes les variables, ce qui donne un arbre. Cet arbre est très grand, puisqu'il comprend 2^n nœuds.

Définition 2.2.3 *Le Diagramme de Décision Binaire (DDB) d'une fonction Φ , associée à l'ordre des variables σ , est la représentation dérivée de l'arbre de Shannon de Φ , associé à l'ordre des variables σ , par application systématique des deux règles suivantes :*

- confondre deux branches partant d'un même nœud conduisant au même sous-arbre,
- repérer les sous-arbres identiques, et ne les faire figurer qu'une fois.

Le DDB est unique, une fois fixés la fonction Φ et l'ordre des variables σ .

La décomposition de Shannon est bien adaptée [30] au calcul de disponibilité. En effet, si on a :

$$\Phi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = ((\neg x_i) \cdot \Phi(x_1, \dots, 0, \dots, x_n)) + (x_i \cdot \Phi(x_1, \dots, 1, \dots, x_n))$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Phi(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n) = 1) = \\ \mathbb{P}(X_i = 0) \cdot \mathbb{P}(\Phi(X_1, \dots, 0, \dots, X_n) = 1) + \mathbb{P}(X_i = 1) \cdot \mathbb{P}(\Phi(X_1, \dots, 1, \dots, X_n) = 1) \end{aligned}$$

En réitérant cette décomposition, on se ramène aux probabilités des composants. Le DDB n'étant qu'un résumé de l'arbre de Shannon, il permet aussi de faire ces opérations.

Composants dépendants

De nombreuses études ont abordé le cas des composants non-indépendants [33, 5]. Nous centrerons notre exposé sur la technique des réseaux bayésiens. Dans ce cas, les n variables X_i prennent leurs valeurs dans des espaces différents (mais toujours finis), de cardinal n_i , ces valeurs seront notées x_i^k pour la $k^{\text{ième}}$ modalité de la variable X_i . Pour décrire la loi jointe des X_i , il faudrait théoriquement donner les $\prod_{i=1}^n n_i$ valeurs des probabilités de tous les états du système. Dans ce modèle, on ne décrit en fait que certaines lois conditionnelles. Quand la dépendance entre deux variables n'est pas décrite, ou ne peut pas être déduite d'autres lois conditionnelles, on suppose l'indépendance.

On note a une fonction de $\{1, \dots, n\}$ dans l'ensemble des parties de $\{1, \dots, n\}$, l'ensemble des prédécesseurs d'une variable donnée. On décrit alors les lois conditionnelles suivantes :

$$\mathbb{P} \left(X_i = x_i^k \mid \bigcap_{j \in a(i)} X_j = x_j^{k_j} \right)$$

L'ensemble de ces données décrit la loi jointe, à condition qu'elles ne comportent pas de cycle, autrement dit :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall p \in \mathbb{N}, i \notin a^p(i)$$

Des algorithmes efficaces permettent l'évaluation de la distribution de probabilité de toute variable du modèle en des temps raisonnables. Les possibilités de modélisation offertes par les réseaux bayésiens sont très intéressantes, et dans certains cas difficilement remplaçables.

Calcul de fiabilité, composants indépendants

La fiabilité est la probabilité que, sur un intervalle de temps donné, le système ait fonctionné correctement. Il faut alors considérer l'état de chacun des composants non plus comme une variable aléatoire, mais comme un processus $X_i(t)$. Les processus $X_i(t)$ sont globalement indépendants. Nous voulons calculer :

$$R(t) = \mathbb{P}(\forall u \in [0, t], \Phi(X(u)) = 1)$$

Le calcul de fiabilité introduit une interaction temporelle entre les composants d'un système, même s'ils sont indépendants. En effet, la défaillance d'un composant n'aura pas le même impact sur la fiabilité du système si le système est déjà tombé en panne dans le passé, à cause de la défaillance d'un **autre** composant. Si le système comporte au moins un composant réparable (dans le cas contraire, la fiabilité est égale à la disponibilité, étudiée ci-dessus), les calculs faits à partir de modèles structurels sont irrémédiablement approximatifs, quelle que soit la méthode de calcul utilisée. On verra pour cela [35, 13, 16].

Les approximations définies dans ces références sont toutes précises sous des conditions proches. En particulier, dans le cas où les composants sont markoviens (temps de bon fonctionnement et temps de réparation de loi exponentielle), il faut que tous les taux de défaillance soient petits devant tous les taux de réparation.

De plus, ces approximations peuvent toutes être mises en œuvre avec chacune des deux représentations définies ci-dessus : les coupes et le DDB.

Par ailleurs, il est probable que ces approximations peuvent aussi être mises en œuvre pour des composants dépendants, à partir d'une représentation par réseau bayésien.

2.2.2 Modèles comportementaux markoviens, avec réparations, sur longue durée

La deuxième grande famille de modèles est la famille des modèles comportementaux. Nous nous centrerons sur l'étude des modèles markoviens. En effet, ces modèles sont assez faciles à utiliser : les algorithmes actuels permettent d'étudier le cas de systèmes comprenant quelques dizaines de composants sans grande difficulté. Parmi ces modèles markoviens, nous consacrons une part importante de notre exposé au cas des modèles de systèmes comportant des possibilités de réparation. De plus nous nous restreindrons au cas dans lequel la durée sur laquelle le système est censé fonctionner est grande devant les temps de réparation. En effet, ce cas est assez fréquent, et est de loin le plus difficile. Sur ce sujet, le lecteur pourra se référer à [48, 49].

Le terme «réparation» est facile à préciser dans le cas de composants à deux états : la défaillance est l'évènement qui fait passer le composant de la marche à la panne, et la réparation l'évènement qui fait passer de la panne à la marche. Le sens est déjà un peu moins évident dans le cas de composants sujets à plusieurs défaillances exclusives. Il vaut donc mieux, plus généralement, considérer les réparations comme des évènements :

1. se produisant plus rapidement (de taux d'occurrence plus grand) que les défaillances,
2. ayant tendance à ramener le système vers un ensemble d'états donné, identique pour toutes les réparations.

Si nécessaire, le point 2 peut être précisé en considérant une relation d'ordre sur les états du système [38, 39].

Pour ce type de modèle, le fait de calculer la fiabilité ou la disponibilité ne change pas fondamentalement la nature des difficultés. C'est pourquoi cela n'apparaît pas ici comme critère de classification, contrairement au paragraphe précédent. Notons cependant que certaines autres caractéristiques, comme la performabilité [36], posent des problèmes de traitement spécifiques.

Problèmes : taille et raideur

Le traitement des modèles comportementaux markoviens avec réparations pose deux problèmes : un problème de taille des matrices manipulées, et un problème de «raideur» de ces

matrices.

Le problème de taille apparaît dès que le système étudié comprend plus d'une dizaine de composants. En effet, si un système comprend n composants à deux états, le nombre de ses états sera de l'ordre de 2^n , ou bien exactement 2^n si les composants sont indépendants. Or, les techniques de traitement des modèles markoviens nécessitent au moins de stocker le vecteur des probabilités de présence dans les différents états du système. Donc, si le nombre de composants croît, la taille du vecteur à stocker croît elle aussi, et exponentiellement.

Le terme de «raideur» a dans notre domaine, deux acceptions.

- Dans un cas, «raide» signifie que certains phénomènes sont beaucoup plus rapides que d'autres (par exemple, les réparations sont beaucoup plus rapides que les défaillances).
- Dans l'autre, cela signifie que les phénomènes les plus rapides sont très rapides, comparés à la durée sur laquelle est étudié le système (par exemple, les temps moyens de réparation sont de l'ordre de l'heure, alors que le système est étudié sur une année).

Si on utilise la méthode d'uniformisation [24], la seconde définition décrit plus précisément les cas difficiles. En effet, cette méthode nécessite un nombre de produits vecteur-matrice à peu près égal au rapport du temps sur lequel est étudié le système, divisé par le plus petit des temps de séjour moyen dans un état.

Solutions pour le problème de taille

Une première solution pour ce problème consiste à remarquer que, puisque les réparations tendent toutes à ramener le système vers les mêmes états, la probabilité de trouver le système aux environs de ces états est assez forte. Autrement dit, parmi les états du système, nous pouvons distinguer deux sous-ensembles :

- un sous-ensemble comprenant généralement peu d'états, dans lequel une part importante de la probabilité est concentrée,
- un sous ensemble souvent énorme, voire même infini, dans lequel la probabilité de présence est très faible.

De nombreuses méthodes [18, 34] tirent parti de cette remarque.

Une autre possibilité est d'utiliser la simulation de Monte-Carlo : cette méthode peut être rendue complètement insensible au nombre d'états du système. En revanche, si le système est très fiable ou disponible, il faudra de très nombreuses simulations pour obtenir une bonne estimation de la fiabilité ou disponibilité. Néanmoins, il est possible d'accélérer cette simulation, de nouveau en utilisant le fait que les réparations ramènent toutes le système vers le même ensemble d'états [38].

Enfin, une dernière possibilité consiste à explorer systématiquement les chemins passant par les différents états du système, et menant à l'état de panne. Cette méthode aussi est insensible au nombre d'états du système, mais peut demander de grands temps de calcul dans certains cas [10].

Approximation lent-rapide

Toujours avec l'idée de repérer les états dans lesquels la probabilité est concentrée, nous pouvons utiliser l'approximation lent-rapide. Cette approximation consiste à considérer comme instantanés les phénomènes les plus rapides [7, 39]. Cela a deux effets bénéfiques.

- D'abord, comme les états dans lesquels se produisent des phénomènes instantanés sont traités séparément des autres, cela réduit la taille des matrices à manipuler.

- Ensuite, comme les problèmes de raideur ne portent que sur le traitement des états dans lesquels il n’y a pas de phénomène instantané, cela réduit ces problèmes. En effet, parmi les phénomènes non-instantanés, il ne reste plus que les plus lents.

On peut constater cela sur le petit exemple suivant (voir figure 2.1) :

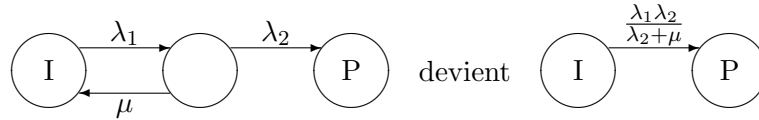


FIG. 2.1 – Exemple d’utilisation de l’approximation lent-rapide

Si l’on utilise la méthode d’uniformisation pour traiter directement le graphe de gauche, étudié sur un temps T , le nombre de produits vecteurs-matrice sera de l’ordre de $T(\lambda_2 + \mu)$. En revanche sur le graphe de droite, ce nombre sera de l’ordre de $T \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 + \mu}$, qui est beaucoup plus petit si $\lambda_2 \ll \mu$. De plus, la matrice (et le vecteur) seront de taille 2 et non 3. Il est vrai que pour un graphe aussi simple, on utilisera plutôt une résolution analytique : la réduction du nombre de produits vecteur-matrice, et de la taille des vecteur et matrice, aurait lieu même pour un graphe plus complexe.

Remarque : Dans le cas étudié ici, au moins dans le cas d’un calcul de disponibilité, il est souvent nécessaire de faire des hypothèses globales sur les états du système : absence d’état absorbant, valeur minimale du taux de réparation (dans le cas d’un modèle markovien), etc. Or, ces hypothèses sont théoriquement redondantes avec la description du système : une fois un système décrit, par exemple par un réseau de Petri stochastique, nous devrions être capables de **prouver** que son graphe de marquage ne contient pas d’état absorbant. Donc, poser cette absence comme une hypothèse supplémentaire paraît gênant.

Néanmoins, cela est indispensable. En effet, avec la puissance d’expression des moyens de modélisation actuels [6], il est en général impossible de prouver par exemple l’absence d’état absorbant à partir de la description du fonctionnement du système, par exemple à l’aide d’un réseau de Petri stochastique.

2.2.3 Autres modèles comportementaux

Pour pouvoir utiliser un modèle markovien, il faut que les temps de bon fonctionnement et les temps de réparation suivent une loi exponentielle. Cette hypothèse est gênante, surtout dans le second cas. C’est pourquoi certains travaux sont effectués pour pouvoir s’en passer. Notons cependant que le fait de pouvoir utiliser une loi autre qu’exponentielle pour les temps de réparation ne règle pas le problème de l’incertitude sur cette loi. Il permet seulement d’effectuer des études de sensibilité ce qui, nous l’avons vu, n’est pas une solution satisfaisante.

Modèles markoviens sans réparations

Lorsque le système ne comporte pas de possibilités de réparations, le graphe obtenu est beaucoup moins raide. De plus, il est souvent acyclique, ce qui simplifie considérablement les calculs [42].

Le cas d’un système comportant des réparations, mais étudiée sur une durée inférieure (ou légèrement supérieure) aux temps de réparation pourra souvent être étudié par les mêmes méthodes.

Modèles semi-markoviens généralisés

Si l'on cherche un modèle plus général que le modèle markovien, il paraît naturel de s'intéresser au modèle semi-markovien. Néanmoins, il apparaît que, dans des cas relativement naturels (voir paragraphe 4.1.2), un système formé de plusieurs composants en interaction, les composants étant eux mêmes décrits par des modèles semi-markoviens, n'est pas décrit par un modèle semi-markovien.

C'est pourquoi certains auteurs [22] définissent les Processus Semi-Markoviens Généralisés (PSMG). Cette classe de processus étant très grande, peu de propriétés intéressantes ont été mises à jour. On peut noter par exemple [32], qui propose une méthode de calcul de la distribution de probabilité du processus, mais en supposant que les lois sont soit des lois exponentielles, soit des lois de Dirac.

Simulation de Monte-Carlo naturelle

La simulation de Monte-Carlo naturelle [23] présente l'avantage de pouvoir être utilisée sous des hypothèses très larges. Néanmoins, quand les systèmes étudiés sont très fiables ou très disponibles, son utilisation est difficile.

C'est pourquoi cette méthode est souvent réservée à l'étude de systèmes industriels peu fiables ou disponibles, dont le principe de fonctionnement est connu avec une grande précision, et dont on veut connaître le fonctionnement réel avec une grande précision. En effet, dans ce cas, grâce à la faible fiabilité ou disponibilité, la simulation est assez rapide. Par ailleurs, si on connaît le fonctionnement avec une grande précision, les décrire en respectant les contraintes d'un modèle spécifique (modèle markovien par exemple) peut être pénible. Il en est de même pour l'exploitation des résultats : se limiter aux résultats donnés par les méthodes analytiques peut être appauvrissant.

2.3 Cas des télécommunications

Actuellement, dans le domaine des télécommunications, la voie de recherche la plus explorée est celle des modèles à dépendance longue et des temps de service plus dispersés que ceux suivant une loi exponentielle [51]. Ceci est en grande partie lié au développement d'Internet. En effet, depuis ce développement, il semble que les recueils de statistiques sur le trafic informatique fassent apparaître des dépendances de longue durée. De plus, pour expliquer ces dépendances de manière réaliste, il est nécessaire de supposer que les temps de service sont très dispersés, ce qui est cohérent avec le fait que les paquets de données numérisées peuvent correspondre à des demandes extrêmement hétérogènes : conversation téléphonique, transfert de fichiers, etc.

Or, l'hypothèse analogue dans le domaine de la fiabilité des systèmes, c'est à dire l'hypothèse que les temps de réparation sont plus dispersés que ceux suivant une loi exponentielle, paraît extrêmement pessimiste : la plupart du temps, les lois des temps de réparation sont plutôt plus concentrées qu'une loi exponentielle. De plus, dans le cas contraire, il est souvent possible de se ramener au cas d'une loi peu dispersée. En effet, une forte dispersion est souvent due au mélange de plusieurs populations de défaillances. Il est alors possible, au moins par avis d'expert, de différencier ces populations.

Chapitre 3

Modèles à réparations vieillissantes

Dans de nombreux cas, la loi du temps de réparation est plutôt plus proche d'une loi de Dirac (autrement dit d'une durée déterministe) que d'une loi exponentielle. En effet, une fois la réparation commencée, le temps qu'il reste avant la fin de la réparation est censé diminuer, parce que le travail de réparation avance (nous présenterons cette idée de façon plus formalisée dans la suite).

C'est pour formaliser ce type d'intuition qu'ont été créées les notions de vieillissement : une variable aléatoire sera dite de loi vieillissante, ou plus simplement vieillissante, si le «temps résiduel» a tendance à diminuer. Dans le cas d'une durée de vie, la diminution de la durée de vie résiduelle correspond bien à la notion de vieillissement. En revanche, il est clair que, dans le cas de réparations, la terminologie est trompeuse.

Nous commencerons, dans cette partie, par présenter les arguments permettant de justifier l'hypothèse de vieillissement pour les temps de réparation. Cette présentation s'appuiera sur une revue de la littérature fiabiliste sur les réparations.

Ensuite, nous exposerons les différentes formalisations mathématiques de l'hypothèse de vieillissement. Les notions de vieillissement et de relations d'ordre entre variables aléatoires étant étroitement liées, nous commencerons par présenter les principaux ordres permettant de comparer des variables aléatoires, puis les notions de vieillissement. Cette présentation sera cependant partielle, pour deux raisons. D'abord, l'activité sur ces sujets est importante : il serait donc difficile de prétendre faire un exposé exhaustif. Ensuite, notre objectif est de présenter ce qui, dans ce domaine, semble utile pour modéliser les réparations. L'un des états de l'art les plus récents sur ce sujet est [46], mais on peut citer aussi [21].

À notre connaissance, l'utilisation d'une hypothèse de vieillissement pour les temps de réparations est une idée nouvelle (on la trouve sous une forme un peu différente dans [9]). En revanche, l'utilisation de la pseudo-variable apparaît dans de nombreux problèmes. On la trouve par exemple dans la référence [2], même si les auteurs ne la mentionnent pas.

3.1 Considérer les temps de réparations comme vieillissants

3.1.1 Que savons-nous des réparations ?

Quelles sont, en pratique, les informations disponibles sur les réparations ? En particulier :

- Que se passe-t-il entre la panne et la remise en service d'un matériel : détection de la panne, réparation proprement dite, remise en service, etc. ?
- Que sait-on de la distribution de probabilité des temps de réparations ?
- Quel impact le choix d'une distribution a-t-il sur les résultats d'étude ?

Ces questions ont été étudiées dans [17]. Dans la littérature et, en particulier dans la norme de référence en terminologie en sûreté de fonctionnement [12], les différents temps constituant les «temps de réparation» sont décrits avec précision : temps de détection de la panne, temps de vérification . . . En revanche, le retour d'expérience ne fournit pas d'information pour caractériser tous ces temps. De même, les opérationnels ne sont intéressés que par la remise en fonctionnement des équipements en panne. C'est pourquoi les «temps de réparation» doivent être considérés comme des temps de rétablissement de la fonction, sans plus de distinction.

En ce qui concerne la forme de la loi, la littérature est assez pauvre. Il est couramment admis que la loi lognormale est une bonne représentation de la distribution des temps de réparation pour la plupart des matériels industriels, mais seule l'étude [28] portant sur 46 jeux de données (traitant de pompes de centrales nucléaires, systèmes électroniques et rotors d'hélicoptères) établit nettement la meilleure adéquation à la réalité de la loi lognormale comparée à la loi

exponentielle.

Enfin, en ce qui concerne l'impact sur la disponibilité, la littérature (par exemple [28]) et les résultats d'une étude de cas (temps de réparation modélisés avec une loi exponentielle et avec une loi lognormale) incitent à penser que l'utilisation de la loi exponentielle, à la place de la loi lognormale, introduit des erreurs négligeables. Cette constatation empirique ne suffit cependant pas à régler le problème de la modélisation des temps de réparation.

3.1.2 Objections

Une première objection est que la loi lognormale n'est pas vieillissante (quelle que soit la définition utilisée). En réalité, la loi lognormale est ici utilisée surtout parce qu'elle permet de prendre en compte les dires d'expert suivants :

- il y a un temps minimum et un temps maximum de réparation,
- il y a une valeur plus probable que les autres (mode),
- la distribution est plutôt plus étalée vers la droite que vers la gauche.

Autrement dit, ces dires d'experts amènent à schématiser la distribution des temps de réparation comme indiqué figure 3.1. Par conséquent, dans ce cas, la loi lognormale n'est pas utilisée pour l'épaisseur de sa fonction de survie, et l'hypothèse de vieillissement n'est pas contradictoire avec l'usage et l'étude [28]. De plus, il est possible qu'un test d'adéquation d'une loi HNBUE sur les données de l'étude [28] donne de meilleurs résultats que pour la loi lognormale.

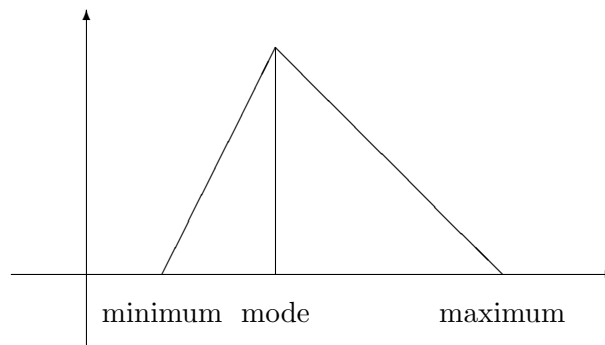


FIG. 3.1 – Distribution des temps de réparations établie par les experts en maintenance

Une seconde objection est que, dans le cas de défaillances agrégées, le temps de réparation peut, à certains moments, croître. Considérons le cas d'un ordinateur qui ne s'allume pas. Cette défaillance peut avoir au moins deux causes : l'ordinateur n'est pas branché, ou il est en panne pour une cause plus grave. Dans le premier cas (dont nous supposons qu'il apparaît une fois sur deux), la réparation prendra 10 secondes, dans le second 2 jours. Par conséquent, pour un observateur extérieur (qui ne connaît pas le diagnostic de panne), après 10 secondes, le temps avant la fin de la réparation croîtra. Alors qu'il pouvait s'attendre, au départ, à un temps de réparation d'environ 1 journée (plus 5 secondes), il sait maintenant que la cause de la panne est grave, et qu'il devra attendre environ 2 jours (moins les 10 secondes écoulées). Nous verrons plus loin (chapitre 4.1.2) que dans ce cas, ni la fiabilité ni la disponibilité ne peuvent être calculées, même de manière approchée. Par conséquent, pour une étude de sûreté de fonctionnement, il sera indispensable de disposer de données plus détaillées, c'est à dire des

taux de défaillance pour chacune des deux défaillances, et de leur temps moyens de réparation, et non pas seulement de la somme des deux taux et de la moyenne des deux temps.

3.1.3 Conclusion

L'objectif de notre étude est d'évaluer l'impact sur la disponibilité et la fiabilité de l'incertitude sur la loi des temps de réparation. Il semble que, dans de nombreux cas, il soit naturel de supposer que ces temps suivent une loi vieillissante. De plus, dans les cas où il est évident que cette hypothèse est fautive, il est aussi évident que cet impact est aussi grand que l'on veut, et qu'il est indispensable de disposer de données supplémentaires. Par conséquent, nous nous concentrerons dans la suite sur le cas des temps de réparation vieillissants.

3.2 Les différents ordres portant sur des variables aléatoires

Nous n'évoquons que le cas des variables aléatoires réelles continues. Le but est de les comparer. Intuitivement, la comparaison peut privilégier la moyenne, la dispersion ou toute autre caractéristique de la mesure. Nous donnons ici une classification plus mathématique, représentant une synthèse de nombreux travaux, et en particulier de l'état de l'art [46].

3.2.1 Les ordres intégraux

Nous appelons «ordre intégral» un ordre construit à partir de l'intégrale d'une fonction prise dans une classe \mathcal{C} donnée. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles positives, et \mathcal{C} une classe de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On peut définir un ordre o par :

$$X \underset{o}{\leq} Y \Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{C}, \mathbb{E}(f(X)) \leq \mathbb{E}(f(Y))$$

Il reste à décrire les correspondances entre la classe \mathcal{C} et l'ordre o .

Classe \mathcal{C}	Ordre o
linéaires croissantes	ordre en moyenne
convexes croissantes	ordre convexe
croissantes	ordre stochastique

Remarque : Nous réservons le terme «ordre stochastique» à l'ordre défini ci-dessus, et parlons d'«ordre entre variables aléatoires» sinon.

Notation 3.2.1 Nous noterons respectivement $\underset{m}{\leq}$, $\underset{conv}{\leq}$, et $\underset{st}{\leq}$ les ordres en moyenne, convexe et stochastique.

L'intérêt de cette caractérisation des ordres est qu'elle facilite l'étude des relations entre ordres. En effet, il est évident que, plus la classe \mathcal{C} est grande, moins l'ordre o permettra de comparer de variables aléatoires. Ainsi, toutes les variables aléatoires sont comparables en moyenne, alors qu'il est facile de trouver des variables aléatoires incomparables pour l'ordre stochastique.

Par ailleurs, pour les ordres convexe et stochastique, on peut noter qu'il est possible de les caractériser en comparant des variables sur le même espace de probabilité :

Proposition 3.2.2 Soient X et Y deux variables aléatoires. On a $X \underset{\text{st}}{\leq} Y$ si et seulement si existent deux variables aléatoires \tilde{X} et \tilde{Y} , définies sur le même espace de probabilité, tels que :

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= X, \quad \tilde{Y} = Y \\ &\text{loi} \quad \text{loi} \\ \tilde{X} &\leq \tilde{Y} \text{ p.s.} \end{aligned}$$

Proposition 3.2.3 Soient X et Y deux variables aléatoires. On a $X \underset{\text{conv}}{\leq} Y$ si et seulement si existent deux variables aléatoires \tilde{X} et \tilde{Y} , définies sur le même espace de probabilité, tels que :

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= X, \quad \tilde{Y} = Y \\ &\text{loi} \quad \text{loi} \\ \tilde{X} &\leq \mathbb{E}(\tilde{Y} | \tilde{X}) \text{ p.s.} \end{aligned}$$

3.2.2 Ordre dispersif

De nombreuses autres possibilités existent pour comparer des variables aléatoires. On peut citer, par exemple l'ordre dispersif, introduit par Doksum en 1969.

Soient X et Y deux variables aléatoires de fonctions de répartition respectives F et G , et F^{-1} et G^{-1} les inverses continues à droite de F et G ; X est inférieur à Y en ordre dispersif (noté $X \underset{\text{disp}}{\leq} Y$) si et seulement si, pour tous $0 < \alpha \leq \beta < 1$ on a :

$$F^{-1}(\beta) - F^{-1}(\alpha) \leq G^{-1}(\beta) - G^{-1}(\alpha)$$

Cet ordre traduit une comparaison des quantiles et donc des concentrations. En particulier, cet ordre est invariant par translation :

$$\forall c \in \mathbb{R}, X \underset{\text{disp}}{\leq} Y \Leftrightarrow X + c \underset{\text{disp}}{\leq} Y$$

3.2.3 Propriétés des ordres sur les variables aléatoires

Pour chaque opération faisant intervenir des variables aléatoires, et chaque ordre o , une question se pose : cette opération est elle compatible avec l'ordre o ? En particulier, cette question se pose pour :

- la somme de variables aléatoires,
- le maximum et le minimum de variables aléatoires,
- l'estimation statistique.

Le deuxième point est particulièrement utile dans le domaine de la fiabilité. En effet, si les composants d'un système sont indépendants, le temps de panne d'une structure en série est le minimum des temps de panne des deux éléments, et le maximum pour une structure parallèle. Nous résumons les réponses à cette question dans le tableau ci-dessous, mais on pourra trouver de plus amples détails dans [8, 46] :

Ordre	minimum	maximum
ordre en moyenne	non conservé	non conservé
ordre convexe	non conservé	conservé
ordre stochastique	conservé	conservé

3.3 Les notions de vieillissement

Le vieillissement traduit une comparaison entre l'état (aléatoire) d'un même objet à deux dates différentes. Il est donc nécessaire de traduire cette comparaison à l'aide des ordres ci-dessus.

Remarque : Les notions de vieillissement ne sont généralement définies que pour des variables aléatoires réelles positives, ce qui n'était pas le cas pour les ordres ci-dessus.

3.3.1 Définitions à partir du taux de défaillance

Cette famille de définitions est sans doute la première utilisée. Le «taux de défaillance est défini», par exemple dans [8, 13], par :

$$\lambda(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(T \in]t; t + \epsilon] \mid T > t)}{\epsilon}$$

Il est aussi appelé «taux de survie» ou «intensité de défaillance», selon les auteurs. Si la fonction de répartition F est dérivable, alors :

$$\lambda(t) = \frac{F'(t)}{\bar{F}(t)}$$

$$F(t) = 1 - \exp \int_0^t -\lambda(u) du$$

On utilise aussi $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$. On peut imposer à la fonction $\Lambda(t)$ diverses contraintes, qui définissent chacune une classe de variables vieillissantes. On retrouvera les principales dans le tableau ci-dessous.

Contrainte sur $\Lambda(t)$	Classe
convexe	IFR (Increasing Failure Rate)
sur-additive	NBU (New Better than Used)
croissante en moyenne	IFRA (Increasing Failure Rate in Average)

Remarque : «Croissante en moyenne» signifie $\frac{\Lambda(t)}{t}$ croissante en t . On peut aussi dire que $\Lambda(t)$ est étoilée en 0.

On a les inclusions suivantes (cf. [8]) : $\text{IFR} \subset \text{NBU} \subset \text{IFRA}$.

3.3.2 Définitions à partir du temps résiduel

Si T est une variable aléatoire réelle positive, on note T_t le temps résiduel à la date t . Par abus, ce temps est représenté par $T_t = \{T - t \mid T > t\}$. Il vaudrait sans doute mieux écrire une égalité des distributions. Quoi qu'il en soit, la fonction de survie de T_t est :

$$F_{T_t} = \frac{\bar{F}(u + t)}{\bar{F}(t)}$$

À partir du temps résiduel, deux types de comparaisons permettent de définir des classes de variables vieillissantes.

1. comparaison du temps résiduel au temps *a priori* : $\forall t > 0, T_t \stackrel{o}{\leq} T_0$
2. décroissance du temps résiduel : $\forall t_1, t_2, t_1 > t_2 \Rightarrow T_{t_1} \stackrel{o}{\leq} T_{t_2}$,

Il est évident que les classes de type 1 contiennent celles de type 2. Dans le tableau suivant, nous nous restreignons aux ordres intégraux, nous ne donnons donc que la classe de fonctions définissant chacun de ces ordres.

Classe \mathcal{C}	$T_t \leq \underset{o}{T_0}$	$T_t \searrow$
linéaires croissantes	NBUE	DMRL
exponentielles croissantes	(a)	(b)
convexes croissantes	NBUC	(c)
croissantes	NBU	IFR

On note que l'on retrouve ici les classes IFR et NBU. On peut par ailleurs faire les remarques suivantes sur les classes (a), (b) et (c).

(a) Cette classe est définie par :

$$\forall a > 0, \mathbb{E}(e^{aT_t}) \leq \mathbb{E}(e^{aT})$$

Alors, en notant :

$$\bar{G}_a(t) = \frac{\int_t^{+\infty} e^{av} f(v) dv}{\int_0^{+\infty} e^{av} f(v) dv}$$

si le dénominateur est fini ; cela revient à l'inégalité :

$$\forall a > 0, \frac{\bar{G}_a(t)}{\bar{F}(t)} \leq e^{at}$$

formulation qui est très proche de la définition NBUE.

(b) En reprenant la même notation $\bar{G}_a(t)$, il faut :

$$\forall a > 0, \frac{\bar{G}_a(t)}{\bar{F}(t)} \leq \frac{\bar{G}_a(t+h)}{\bar{F}(t+h)} e^{ah}$$

(c) Pour caractériser l'ordre convexe, on peut se limiter aux fonctions de la forme $c(x) = (x - c)^+$ (cf [8]). Par conséquent, la classe (c) se définit par :

$$\forall (t, t') \in \mathbb{R}^{+2}, t < t' \Rightarrow \int_b^{+\infty} \frac{\bar{F}(u+t)}{\bar{F}(t)} du \geq \int_b^{+\infty} \frac{\bar{F}(u+t')}{\bar{F}(t')} du$$

3.3.3 Définitions par comparaison avec l'exponentielle de même moyenne

Cette famille de définitions est de loin la moins riche, puisque, au moins dans le cas des ordres intégraux, elle ne comprend qu'une classe non-triviale. Dans le cas de l'ordre convexe, on obtient la classe des fonctions HNBUE (pour Harmonic New Better Than Used in Expectation).

3.3.4 Propriétés des classes de vieillissement

Là aussi, pour toute opération sur des variables aléatoires, la question se pose de la compatibilité avec une classe donnée de variables vieillissantes. On peut citer en particulier :

- tests statistiques,
- formation de systèmes cohérents,

- convolution,
- mélange.

Par ailleurs, et c'est assez proche de l'objet de cette thèse, il est intéressant de chercher des bornes de la fonction de répartition d'une variable, dont on ne connaît que des moments ou des valeurs ponctuelles, et une propriété de vieillissement. Dans cette perspective, citons [27] sur les variables HNBUE, [45] sur les variables IFRA.

3.4 Cadre de l'étude

Beaucoup de travaux ont été effectués sur des systèmes dont les défaillances sont vieillissantes, mais aucun sur des réparations vieillissantes, hormis [9]. Or, l'estimation de la loi de la durée des réparations est aussi difficile que celle des défaillances. Il paraît donc pertinent de tenter d'utiliser les mêmes outils.

Par la suite, nous ferons les hypothèses suivantes :

1. défaillances exponentielles, réparations vieillissantes, et plus précisément HNBUE,
2. temps de bon fonctionnement grands devant les temps de réparation.

3.4.1 L'ordre convexe

L'ordre convexe peut être caractérisé de nombreuses manières. Nous avons d'abord les équivalences suivantes [8] :

Proposition 3.4.1 *Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles de fonctions de répartition F_1 et F_2 . Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. $X_1 \leq_{\text{conv}} X_2$
2. Soit h_a définie par $h_a(t) = (t - a)^+$, pour tout a réel positif :

$$\mathbb{E}(h_a(X_1)) \leq \mathbb{E}(h_a(X_2))$$

3. Pour tout a réel positif :

$$\int_a^{+\infty} \bar{F}_1(u) du \leq \int_a^{+\infty} \bar{F}_2(u) du$$

Nous avons déjà cité la caractérisation de la proposition 3.2.3. On peut aussi citer la caractérisation suivante [46].

Proposition 3.4.2 *Pour tout fonction h , on note $S^-(h)$ le nombre de changements de signe de h , la relation $X_1 \leq_{\text{conv}} X_2$ est équivalente à $S^-(F_1 - F_2) \leq 1$, la séquence de signes étant $+, -$ quand $S^-(F_1 - F_2) = 1$.*

3.4.2 Les pseudo-variables

Utilisant par la suite les pseudo-variables, nous axerons notre exposé, et les notations, sur les pseudo-variables plus que sur la pseudo-fiabilité.

Notation 3.4.3 Soit R une variable aléatoire réelle positive, de fonction de survie \bar{F}_R et de moyenne r . On note \tilde{R} la pseudo-variable de R , définie à partir de sa **densité** $f_{\tilde{R}}$:

$$f_{\tilde{R}}(t) = \frac{\bar{F}_R(t)}{r}$$

Les variables de loi exponentielle sont donc invariantes par cette transformation, ce qui est lié à leur absence de vieillissement comme de rajeunissement.

Les pseudo-variables ont une grande importance dans le domaine des processus de renouvellement. Citons en particulier la propriété fondamentale suivante [20] :

Proposition 3.4.4 Soit un processus de renouvellement retardé, de première durée de renouvellement R_0 , les durées suivantes étant notées R_i . La fonction de renouvellement, qui désigne le nombre moyen de renouvellements avant une date donnée, est notée $H(t)$. Cette fonction est linéaire si et seulement si :

$$R_0 \stackrel{\text{loi}}{=} \tilde{R}_1$$

Dans le même cadre, on montre (cf. [20]) que la pseudo-variable est la limite en loi, quand t tend vers l'infini, de la durée séparant t du prochain renouvellement.

Plus récemment, la pseudo-variable apparaît naturellement dans le calcul du temps de panne d'un système parallèle (cf. [2], repris dans [3]).

Proposition 3.4.5 Soit un système formé de n composants identiques en parallèle, de loi de temps de défaillance exponentielle, et de temps de réparation R . Alors, le temps de panne tend en loi, quand t tend vers l'infini, vers une variable T :

$$\mathbb{P}(T > y) = \mathbb{E}(R) f_{\tilde{R}}(y) \bar{F}_{\tilde{R}}^{n-1}(y)$$

Pour la suite de notre travail, les propriétés les plus utilisées sont les deux suivantes.

Proposition 3.4.6 Soient deux variables aléatoires réelles positives R_1 et R_2 .

$$R_1 \stackrel{\text{conv}}{\leq} R_2 \Leftrightarrow \tilde{R}_1 \stackrel{\text{st}}{\leq} \tilde{R}_2$$

Preuve : Cette équivalence est une conséquence de la définition de la pseudo-variable, avec la troisième assertion de la proposition 3.4.1. ♣

Nous construirons aussi des variables aléatoires à l'aide de la proposition suivante.

Proposition 3.4.7 Soit F une fonction de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} , concave, vérifiant :

$$\begin{aligned} F'(0) &< +\infty \\ F(0) &= 0 \\ F(u) &\xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 1 \end{aligned}$$

alors, il existe une variable aléatoire R de pseudo-variable \tilde{R} telle que :

$$F = F_{\tilde{R}}$$

et de plus :

$$\begin{aligned} \bar{F}_R(u) &= \frac{F'(u^-)}{F'(0)} \\ \mathbb{E}(R) &= \frac{1}{F'(0)} \end{aligned}$$

Preuve : Étant concave, la fonction F est dérivable à droite et à gauche sur tout \mathbb{R}^{+*} , dérivable en 0, et $F'(u^-) \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$. Donc \bar{F}_R est définie, est décroissante, continue à gauche, vaut 1 en 0 et 0 en $+\infty$. De plus :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R) &= \int_0^{+\infty} \bar{F}_R(u) du = \int_0^{+\infty} \frac{F'(u)}{F'(0)} du = \frac{1}{F'(0)} \\ \int_0^{+\infty} f_{\tilde{R}}(u) du &= \int_0^{+\infty} \frac{\bar{F}_R(u)}{\mathbb{E}(R)} du = 1\end{aligned}$$

♣

Enfin, nous utiliserons la propriété suivante.

Proposition 3.4.8 *Soit R une variable aléatoire réelle positive :*

$$\tilde{R} \underset{\text{st}}{\geq} \mathcal{U}_{\mathbb{E}(R)}$$

où \mathcal{U}_b est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, b]$

Preuve : En notant $\delta_{\mathbb{E}(R)}$ une variable suivant une loi de Dirac de valeur $\mathbb{E}(R)$, l'inégalité de Jensen donne :

$$R \underset{\text{conv}}{\geq} \delta_{\mathbb{E}(R)}$$

et le passage à l'ordre stochastique sur les pseudo-variables vient de la proposition 3.4.6. ♣

3.4.3 La classe HNBUE

Comme dit précédemment, la classe des variables HNBUE est la classe des variables inférieures, en ordre convexe, à l'exponentielle de même moyenne. On peut réécrire cette définition à l'aide des pseudo-variables.

Proposition 3.4.9 *Soit R une variable aléatoire réelle positive. On dira que R est HNBUE si et seulement si :*

$$\tilde{R} \leq \mathcal{E}_{\frac{1}{\mathbb{E}(R)}} \underset{\text{st}}{\leq}$$

où \mathcal{E}_λ est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ .

Notation 3.4.10 *On note \mathcal{H}_m l'ensemble des variables aléatoires qui sont la pseudo-variable d'une variable aléatoire HNBUE de moyenne m .*

Nous pouvons caractériser l'ensemble \mathcal{H}_m de la façon suivante.

Proposition 3.4.11 *La fonction de répartition d'un élément de \mathcal{H}_m est toute fonction possédant les propriétés suivantes :*

- concave,
- pour tout réel positif u : $1 - e^{-\frac{u}{m}} \leq F(u) \leq \frac{u}{m} \wedge 1$.

Preuve : Grâce à l'encadrement de F , nous savons que $F'(0) = \frac{1}{m} < +\infty$, que $F(0) = 0$, et que $F(u) \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 1$. Nous pouvons donc utiliser la proposition 3.4.7. Soit R la variable ainsi construite : on sait que $\tilde{R} \leq \mathcal{E}_{\frac{1}{\mathbb{E}(R)}} \underset{\text{st}}{\leq}$, ce qui signifie que R est HNBUE, d'après la proposition 3.4.9

♣

Cette proposition est illustrée par la figure 3.2 : toute pseudo-variable d'une variable HNBUE est dans l'espace délimité par les deux courbes plus foncées. La courbe plus claire est la fonction de répartition de la pseudo-variable d'une variable suivant une loi d'Erlang d'ordre 3 et de même moyenne : on sait qu'une telle loi, comme somme de variables de loi exponentielles est vieillissante, et en particulier HNBUE.

Puisque nous supposons les réparations HNBUE, il est intéressant de savoir si cette propriété

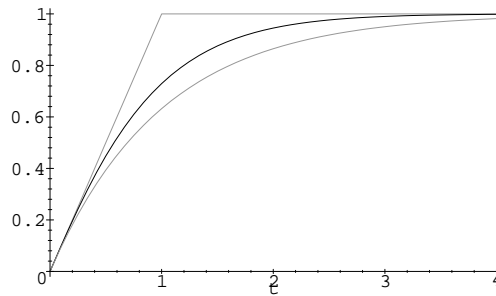


FIG. 3.2 – Encadrement de la pseudo-variable d'un variable HNBUE

peut être testée statistiquement. De nombreux travaux existent sur ce sujet. On trouvera, par exemple dans [26], des familles de tests permettant de choisir entre la propriété HNBUE et l'exponentialité.

Chapitre 4

Quelques études de sûreté de fonctionnement

Nous voulons étudier l'influence de la forme des lois des temps de réparation des composants sur la disponibilité et la fiabilité d'un système. Dans ce chapitre préliminaire, nous constatons les faits suivants.

- Dans certains cas relativement simples à caractériser, cette influence est nulle. L'étude est donc close pour ces cas.
- Dans certains cas eux aussi assez simples, il y a une influence certaine. De plus, dans ces cas-là, supposer que la loi des temps de réparation n'est pas vieillissante fait que l'influence de la forme de la loi est aussi grande que l'on veut. Il semble donc pertinent de vouloir étudier l'influence de la loi des temps de réparation, à partir d'hypothèses de vieillissement.
- Enfin, nous proposons deux résultats permettant, dans des cas un peu particuliers mais tout à fait réalistes, de borner simplement l'influence de la forme de la loi des temps de réparation.

Ces constatations faites, nous pourrions donc nous concentrer sur les cas utiles et difficiles que nous avons isolés, ce qui fera l'objet du chapitre suivant.

4.1 Cas asymptotique

4.1.1 Systèmes à composants indépendants

On considère ici le cas de composants dont les évolutions obéissent à des processus aléatoires indépendants. Dans ce cas, les lois des temps de bon fonctionnement et de réparation n'ont aucune influence sur la disponibilité asymptotique [20]. Par conséquent, on peut choisir de supposer ces lois exponentielles, ce qui revient à supposer que l'ensemble du modèle du système est markovien.

De plus, si on s'intéresse au taux asymptotique de défaillance du système, il est possible de l'approcher au moyen du taux de Vesely, car les calculs sont alors relativement simples [14]. Or, ce taux de Vesely ne dépend que des disponibilités asymptotiques des composants : par conséquent, le taux de Vesely ne dépend que des temps moyens de défaillance et de réparation.

4.1.2 Exemple de système à composants «dépendants»

En revanche, si l'organisation du système fait que les composants sont dépendants les uns des autres, on ne peut pas se contenter des espérances des temps de bon fonctionnement et de réparation. Considérons par exemple le système suivant :

- un composant A de taux de défaillance λ et de temps de réparation R de moyenne r ,
- un composant B de taux de défaillance λ et de temps de réparation μ .

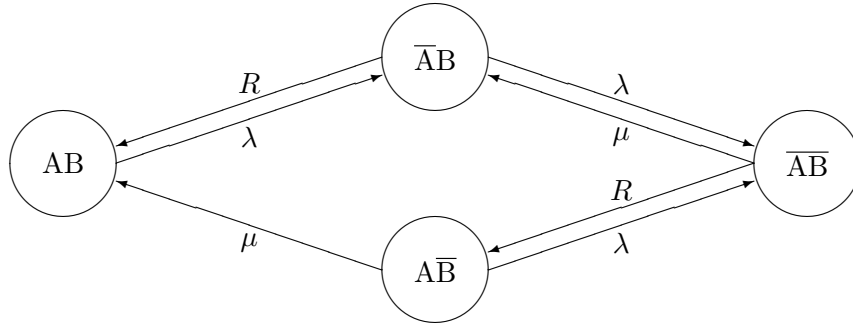
Les hypothèses de fonctionnement sont les suivantes.

- Le composant B ne fonctionne que si le composant A est en panne : il démarre dès que A tombe en panne, et s'arrête dès que A est réparé.
- Le temps de réparation de A est indépendant de l'état du système.
- Le système est en panne si les deux composants sont en panne.

Nous n'avons pas trouvé de solution détaillée de ce problème dans la littérature, il est donc utile de la détailler ici.

Comme nous nous intéressons au système dans son ensemble, il est inutile d'indiquer explicitement, pour chaque état du système, si le composant B est sollicité ou pas. En effet, cela peut se déduire de l'état du composant A. Autrement dit, le graphe des états du système comporte quatre états, notés AB , \overline{AB} , $A\overline{B}$, $\overline{A\overline{B}}$ (voir figure 4.1).

- AB est l'état dans lequel le composant A est en panne et le composant B en bon état et en attente,
 - \overline{AB} est l'état dans lequel le composant A est en panne et le composant B en bon état et sollicité,
 - $A\overline{B}$ est l'état dans lequel le composant A est en marche et le composant B en panne,
 - $\overline{A\overline{B}}$ est l'état dans lequel les composant A et B sont en panne, et le système aussi.
- Parmi ces états, seuls deux sont régénératifs (ce qui implique que le modèle n'est pas semi-markovien, du moins si on prend comme espace d'états ces 4 états) : AB et $\overline{A\overline{B}}$: nous nous servirons de ces états pour commencer le calcul des probabilités de présence dans les différents états.

FIG. 4.1 – Exemple de système où la forme de la loi de R influe

Par ailleurs, on considère le graphe des états du composant B, **quand il est sollicité** : ce graphe comporte deux états notés B et \overline{B} , les taux de défaillance et de réparation étant respectivement λ et μ .

On note :

- $\mathbb{P}(E)$: la probabilité asymptotique de présence dans l'état E .
- $\mathbb{P}(E_1 \rightarrow E_2)$: la probabilité de passage de l'un des états régénératifs à l'autre, sans repasser par le premier,
- $P_{E_1|E_2}(u)$ la probabilité que le composant B soit dans l'état E_1 à la date u sachant qu'il était dans l'état E_2 à la date 0, indépendamment de l'état du composant A..

Avec ces notations, on a (cf. [23, 41]) :

$$P_{\overline{B}|B}(u) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \times (1 - e^{-(\lambda + \mu)u})$$

$$P_{B|\overline{B}}(u) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \times (1 - e^{-(\lambda + \mu)u})$$

Alors, en conditionnant par R , durée de la réparation de A :

$$\mathbb{P}(AB \rightarrow A\overline{B}) = \mathbb{E}\left(P_{\overline{B}|B}(R)\right)$$

$$\mathbb{P}(A\overline{B} \rightarrow AB) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \times \mathbb{E}\left(P_{B|\overline{B}}(R)\right)$$

En effet, pour une valeur de R donnée, la probabilité que le système, partant de l'état AB , aille dans l'état $A\overline{B}$, est la probabilité que le composant B soit en panne à la date R , soit $P_{\overline{B}|B}(R)$.

Pour connaître la disponibilité asymptotique du système, il reste à connaître le temps moyen de séjour dans l'état de panne, sachant que l'on est sorti de l'état AB, nécessairement par la panne de A (on pourrait aussi calculer à partir de l'autre état régénératif). Ce temps moyen de séjour est :

$$\mathbb{E} \left(\int_0^R P_{\overline{B}|B}(u) du \right)$$

En effet, pour une valeur de R donnée, partant de l'état AB, le temps moyen de séjour du système dans l'état de panne est $\int_0^R P_{\overline{B}|B}(u) du$. Finalement :

$$\mathbb{P}(\overline{AB}) = \frac{\mu + \lambda \mathbb{E} \left(P_{B|\overline{B}}(R) \right)}{\lambda \mathbb{E} \left(P_{\overline{B}|B}(R) \right) + \mu + \lambda \mathbb{E} \left(P_{B|\overline{B}}(R) \right)} \times \lambda \mathbb{E} \left(\int_0^R P_{\overline{B}|B}(u) du \right)$$

Ce résultat général permet de traiter le cas de la loi exponentielle et de la loi de Dirac :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\overline{AB} \mid R \text{ exponentielle}) &= \\ &= \frac{r^2 \lambda^2 \mu (2r\lambda + r\mu + 1)}{(r\lambda^2 + 2r\lambda\mu + r\mu^2 + \mu)(r\lambda + r\mu + 1)} \\ \mathbb{P}(\overline{AB} \mid R \text{ Dirac}) &= \\ &= \frac{\mu (-2\lambda - \mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)r}) \lambda^2 (r\lambda + r\mu + e^{-(\lambda+\mu)r} - 1) (-\mu - \lambda + \lambda e^{-(\lambda+\mu)r})}{(\lambda + \mu)^3} \end{aligned}$$

Les formules obtenues sont lourdes. Deux possibilités se présentent pour obtenir des résultats plus compréhensibles.

La première consiste à rechercher un équivalent pour des taux de défaillance tendant vers 0. En notant :

$$\rho = \mu r$$

on obtient les résultats suivants.

– Si le temps de réparation du composant A suit une loi exponentielle :

$$\mathbb{P}(\overline{AB} \mid R \text{ exponentielle}) \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 \times \frac{\rho^2}{\rho + 1}$$

– Si le temps de réparation du composant A suit une loi de Dirac :

$$\mathbb{P}(\overline{AB} \mid R \text{ Dirac}) \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 \times (e^{-\rho} + \rho - 1)$$

Il est clair que ces deux équivalents ne sont pas égaux. En particulier, leur rapport tend vers 2 quand ρ tend vers 0. Par ailleurs, puisqu'il tend vers 1 en l'infini, ce rapport est borné.

La seconde solution, qui complète la première, consiste à étudier numériquement le rapport $\frac{\mathbb{P}(\overline{AB} \mid R \text{ exponentielle})}{\mathbb{P}(\overline{AB} \mid R \text{ Dirac})}$. Sur la figure 4.2, le trait le plus foncé représente le rapport des probabilités pour $\lambda = 10^{-1}$, $\mu = 1$, et ρ variant de 0 à 2. Le trait plus clair représente le rapport des équivalents pour λ tendant vers 0.

Il est donc indispensable, au vu de cet exemple, de tenir compte de la forme de la loi des temps de réparation.

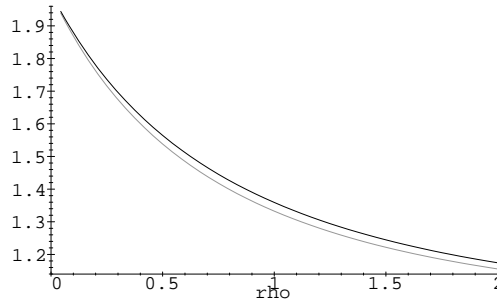


FIG. 4.2 – Rapport entre les probabilités dans le cas exponentiel et le cas Dirac

4.1.3 Cas où un temps de réparation n'est pas vieillissant

On reprend l'exemple précédent, mais la loi de R n'est plus vieillissante. Dans ce cas, le rapport avec le résultat obtenu pour une loi de Dirac n'est pas nécessairement borné. Pour le montrer, nous paramétrons l'ensemble du système par un paramètre α , qui varie de 2 à l'infini.

- La loi de R est discrète, définie par :
 - $R = \frac{1}{2\alpha^2}$, avec probabilité $\frac{\alpha-2}{\alpha-1}$,
 - $R = \frac{1}{2\alpha}$, avec probabilité $\frac{1}{\alpha-1}$.
- La valeur de μ ne varie pas, et est égale à 1.
- On suppose que $\lambda = \alpha^{-1}$.

La forme de loi de R peut être obtenue si l'on agrège en une seule défaillance deux défaillances de temps de réparations moyens très disparates.

Puisque la loi de R est un mélange de lois de Dirac, la disponibilité du système avec cette loi est obtenue par combinaison convexe des disponibilités pour chacune de lois de Dirac mélangées. Autrement dit, on a :

$$\mathbb{P}(\overline{\text{AB}} \mid R \text{ mélange}) = \frac{\alpha-2}{\alpha-1} \times \mathbb{P}\left(\overline{\text{AB}} \mid R \text{ Dirac de valeur } \frac{1}{2\alpha^2}\right) + \frac{1}{\alpha-1} \times \mathbb{P}\left(\overline{\text{AB}} \mid R \text{ Dirac de valeur } \frac{1}{2\alpha}\right)$$

Si nous comparons cette disponibilité avec celle obtenue dans le cas où R est une loi de Dirac de même moyenne, (soit $\frac{1}{\alpha^2}$), nous constatons que le rapport n'est pas borné quand α tend vers l'infini. En effet :

$$\frac{\mathbb{P}(\overline{\text{AB}} \mid R \text{ mélange})}{\mathbb{P}(\overline{\text{AB}} \mid R \text{ Dirac})} = \frac{\alpha}{4} + \frac{11}{24} + O\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

Remarquons que ces variations restaient bornées avec les seules lois de Dirac et exponentielles, ce qui incite à penser qu'il est possible de contrôler l'incertitude engendrée par la forme de la loi avec des hypothèses de vieillissement.

4.1.4 Conclusion

Nous devons donc étudier l'influence de la forme de la loi des temps de réparation sur les valeurs asymptotiques, en faisant des hypothèses sur cette forme. Il serait néanmoins intéressant de pouvoir aussi répondre à la question suivante : peut-on étudier l'influence sur les valeurs à temps fini ?

4.2 Temps fini

Dans le cas où le système est réduit à un composant à 2 états, son évolution est modélisée par un processus de renouvellement alterné [20], et on peut étudier explicitement un certain nombre de cas. Nous supposons que la loi de temps de vie du composant est exponentielle, de taux λ , et celle du temps de réparation de loi F et de moyenne r . Les cas que nous étudierons par la suite se différencieront par la forme de la loi F du temps de réparation, la valeur de $A(0)$ disponibilité en 0, et la valeur de λr .

Oscillations Contrairement à ce qui se passe pour un composant markovien, la disponibilité peut dans certains cas osciller autour de sa valeur limite. Par exemple, en utilisant les méthodes proposées dans [23] (programme Maple en annexe 9.2.1), on peut étudier le cas (F Dirac, $A(0) = 1$, $\lambda r = 1$) représenté figure 4.3, l'autre courbe correspondant à (F exponentielle, autres paramètres identiques) : on constate que la disponibilité oscille autour de sa valeur limite. De plus, ce phénomène d'oscillations s'observe pour toute valeur de λr , et pour des lois plus «douces» que la loi de Dirac. Par exemple, dans le cas (F Erlang d'ordre 2, $A(0) = 1$, λr quelconque), le système peut être représenté par une chaîne de Markov à 3 états (la loi d'Erlang d'ordre 2 étant la loi de la somme de 2 variables aléatoires suivant une loi exponentielle), dont la matrice est :

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & \frac{-2}{r} & \frac{2}{r} \\ \frac{2}{r} & 0 & \frac{-2}{r} \end{pmatrix}$$

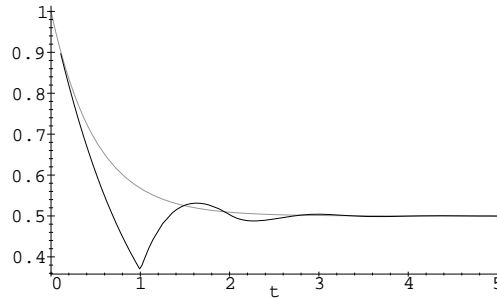
Les valeurs propres de cette matrice sont :

$$\frac{\lambda r + 4 \pm i\sqrt{\lambda r(8 - \lambda r)}}{2r}$$

Ces oscillations rendent difficile l'étude des valeurs à temps fini.

Comparaison avec la disponibilité du composant markovien Il est intéressant de savoir si la disponibilité du composant markovien est toujours supérieure, ou toujours inférieure, à la disponibilité d'un composant non-markovien, avec les mêmes valeurs de λ et r . D'abord, si l'on se réfère à la figure 4.3, on constate que les deux courbes se croisent : on ne peut donc pas énoncer de règle générale sur la comparaison des disponibilités. De plus ce phénomène se retrouve même pour des valeurs beaucoup plus faibles de λr . Pour cela, il suffit que la disponibilité du composant soit nulle en 0. En effet, dans le cas (F Dirac, $A(0) = 0$, λr quelconque), la disponibilité :

- est nulle sur $[0, r[$,
- est égale à 1 en r ,

FIG. 4.3 – $A(t)$, F Dirac, $A(0) = 1$, $\lambda r = 1$

– évolue ensuite de la même façon que dans le cas (F Dirac, $A(0) = 1$, λr quelconque), avec un décalage de r .

En revanche, dans le cas (F exponentielle, $A(0) = 0$, λr quelconque) la disponibilité évolue de manière monotone vers $\frac{1}{1+\lambda r}$: il y a donc une date avant laquelle le composant non-markovien est moins disponible que le composant markovien, et plus disponible après.

On constate donc qu’il n’y a pas de règle générale simple sur les valeurs relatives des disponibilités dans le cas markovien et le cas non-markovien.

Conclusion Il semble finalement que, au moins sur les exemples précédents, il faille renoncer à l’étude directe de la disponibilité et de la fiabilité, à temps fini.

4.3 Dépendances «faibles»

On peut aussi s’intéresser à quelques cas particuliers de dépendances faibles : la modélisation des tests, les pannes de faible durée admissible.

4.3.1 Modélisation des tests

Dans le cas d’un système testé régulièrement, on distingue l’indisponibilité du système $\bar{A}(t)$ de l’indisponibilité du système **avec tests**, notée $\bar{B}(t)$. Dans ce qui suit on supposera que les tests remettent à neuf le système, ce qui s’écrit $\bar{B}(t) = \bar{A}(t - t_t)$, où t_t est la date du dernier test. Notre but est de calculer l’indisponibilité moyenne asymptotique du système avec tests, c’est à dire l’expression :

$$\mathcal{I} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \bar{B}(t) dt$$

La modélisation des tests est une utilisation classique de la théorie du renouvellement [20, 3]. Cependant, l’utilisation de la propriété HNBUE (cf. 3.4) permet de préciser les résultats connus.

Théorème 4.3.1 *Soit un système d'indisponibilité $\bar{A}(t)$ croissante en fonction de t , Riemann intégrable. Ce système est testé périodiquement. Les tests remettent à neuf le système. Les tests arrivent selon un processus de renouvellement de loi F inconnue et de moyenne r connue, et de moment d'ordre 2 fini. Sous ces hypothèses, l'indisponibilité moyenne asymptotique du système est*

- plus petite si F est déterministe (ou de Dirac) que si F est une autre loi.
- plus grande si F est exponentielle que si F est une autre loi HNBUE,

Preuve : La première partie de la preuve reprend des méthodes connues. Les tests constituant un processus de renouvellement, on utilise les notations et hypothèses suivantes :

- $T_0 = 0$: renouvellement à la date 0,
- τ_i : durées entre renouvellements, i.i.d.,
- $N_t = \sum_{n \geq 0} \mathbf{1}(T_n \leq t)$: indice du **premier** renouvellement **après** t .

Comme les tests remettent à neuf le système :

$$\bar{B}(t) = \bar{A}(t - T_{N_t-1})$$

donc, en conditionnant par les dates des tests :

$$\int_0^t \bar{B}(t) dt = \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{N_t} \int_{T_{i-1}}^{T_i} \bar{A}(u) du - \int_t^{T_{N_t}} \bar{A}(u) du \right)$$

On note :

$$\mathcal{A}_i = \int_{T_{i-1}}^{T_i} \bar{A}(u) du$$

Cette grandeur est une variable aléatoire pour laquelle on peut appliquer l'identité de Wald [13] p. 161. En effet, pour tout n :

$$\{N_t = n\} = \{T_{n-1} \leq t < T_n\} \in \sigma(\tau_1, \dots, \tau_n) = \sigma(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n)$$

où $\sigma(\tau_1, \dots, \tau_n)$ représente la tribu engendrée par les variables aléatoires τ_1, \dots, τ_n . Alors :

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{N_t} \mathcal{A}_i \right) = \mathbb{E}(N_t) \mathbb{E}(\mathcal{A}_1)$$

Il reste à majorer le terme $(t^{-1} \times \mathbb{E} \left(\int_t^{T_{N_t}} \bar{A}(u) du \right))$. L'indisponibilité étant bornée par 1, on a :

$$\frac{1}{t} \mathbb{E} \left(\int_t^{T_{N_t}} \bar{A}(u) du \right) \leq \frac{1}{t} \mathbb{E}(T_{N_t} - t)$$

Or, $\mathbb{E}(T_{N_t}) = H(t)r$, où H est la fonction de renouvellement, dont nous savons (cf. [8], p. 134) :

$$H(t) \leq \frac{t}{r} + \frac{\mathbb{E}(\tau_1^2)}{r^2}$$

d'où :

$$\frac{1}{t} \mathbb{E} \left(\int_t^{T_{N_t}} \bar{A}(u) du \right) \leq \frac{1}{t} \frac{\mathbb{E}(\tau_1^2)}{r} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Par ailleurs :

$$\frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{r}$$

Donc, l'indisponibilité moyenne converge, et :

$$\mathcal{I} = \frac{\mathbb{E}(\mathcal{A}_1)}{r}$$

Or, la variable \mathcal{A}_1 est une fonction convexe croissante de τ_1 , car $\bar{A}(t)$ est positive et croissante. Son espérance est donc maximale parmi les lois HNBUE si F est exponentielle (par définition des lois HNBUE, cf. 3.4), et minimale parmi toutes les lois si F est déterministe (par l'inégalité de Jensen). ♣

Nous n'avons pas trouvé de résultat de ce type dans la littérature, même si aucune idée n'est nouvelle. L'élément nouveau est le dernier paragraphe : la variable \mathcal{A}_1 est une fonction convexe croissante de τ_1 , car $\bar{A}(t)$ est positive et croissante. C'est cette constatation, alliée à l'hypothèse HNBUE sur τ_1 , qui permet de construire l'encadrement.

Il faut noter que nous n'avons utilisé que la croissance de \bar{A} et sa remise à zéro lors de dates données par un processus de renouvellement. On retrouve donc une propriété utilisée dans d'autres contextes : performances de systèmes, assurances, etc. Par ailleurs, il est clair que la croissance de \bar{A} n'est pas automatique, et doit donc être vérifiée.

Utilisation du résultat Dans la plupart des cas, les tests sont déterministes. Par conséquent, on pourrait croire ce résultat sans intérêt. En fait, il permet de montrer que, si l'on accepte d'être pessimiste (dans le cas d'une étude de sûreté), et si modéliser les tests de manière déterministe pose un problème, il est possible de représenter les temps entre tests comme aléatoires de loi HNBUE.

Par exemple, il est possible de les représenter comme suivant une loi exponentielle, ce qui permet d'utiliser les méthodes markoviennes. De plus, si cette représentation se révèle trop pessimiste, il est toujours possible d'utiliser une représentation par une loi d'Erlang.

4.3.2 Pannes de courte durée admissibles

Un problème similaire se pose dans le cas de la conduite d'une centrale nucléaire. Lorsque certains composants tombent en panne, la sûreté de la centrale est dégradée. C'est pourquoi, pour les composants les plus importants, et si l'on prévoit que la réparation durera longtemps (plus longtemps que le «temps de consigne»), il est demandé d'arrêter la centrale. Ce type de problème peut également apparaître dans le cas d'un système de secours de temps de bon fonctionnement presque déterministe (batterie, réservoir, etc.).

Dans le cadre du projet CIDEM (Conception Intégrant la Disponibilité, le retour d'Expérience et la Maintenance) de la Division Recherche et Développement de EDF [11], il était indispensable d'évaluer l'indisponibilité due aux dépassements de temps de consigne. Cette évaluation a été faite en supposant que le temps de réparation suit une loi exponentielle. Nous nous proposons d'étudier l'impact de cette approximation, si l'on suppose que la loi du temps de réparation est vieillissante.

Pour évaluer l'indisponibilité moyenne asymptotique \mathcal{I} due aux dépassements de temps de consigne suite aux indisponibilités d'un composant, il faut calculer la moyenne de son temps

de réparation R , sachant que ce temps est plus grand que le temps de consigne c . Plus précisément, on trouve dans [23] le résultat suivant, où λ est le taux de défaillance d'un composant, f la densité de son temps de réparation, et r son espérance (MTTR, ou Mean Time To Repair) :

$$\mathcal{I} = \frac{\lambda \int_c^{+\infty} t f(t) dt}{1 + \lambda r}$$

Pour une densité du temps de réparation exponentielle $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, on obtient une indisponibilité \mathcal{I}_e :

$$\mathcal{I}_e = \frac{\lambda e^{-\frac{c}{r}}}{1 + \lambda r} (r + c)$$

La notion de vieillissement qui s'applique le plus simplement à ce cas est la classe HNBUE. Dans la formule générale, on peut écrire :

$$\int_c^{+\infty} t f(t) dt = \mathbb{E}(H(R))$$

$$H(R) = \max(0, R - c) + c \mathbf{1}(R > c)$$

Le premier terme est une fonction convexe croissante : la définition même d'une loi HNBUE peut donc s'appliquer. L'intégration du second terme donne la fonction de répartition du temps de réparation, pour laquelle il est possible d'utiliser les bornes données dans [27]. On obtient alors :

$$\mathcal{I} \leq \frac{\lambda e^{-\frac{c}{r}}}{1 + \lambda r} (r + ec)$$

Si on dégrade un peu cette majoration, on obtient une majoration très « parlante » :

$$\mathcal{I} \leq e \times \mathcal{I}_e$$

Cela signifie qu'il suffit de multiplier par e l'indisponibilité due aux dépassements de consigne, telle que calculée avec le modèle exponentiel, pour obtenir un majorant de cette indisponibilité, pour toutes les lois vieillissantes de la classe HNBUE.

Sur ce cas relativement simple, l'utilisation de l'hypothèse HNBUE permet directement de majorer la probabilité étudiée, et permet donc des applications pratiques.

Chapitre 5

Probabilité des séquences de panne

Ce chapitre contient l'essentiel de notre contribution à l'analyse des séquences de panne pour des réparations quelconques.

À partir d'approximations pessimistes, on peut montrer (cf. [47, 21]) que la fiabilité et la disponibilité d'un système dépendent essentiellement de la probabilité des séquences menant à la panne, ne comportant aucune réparation réussie. Nous commencerons donc par étudier la sensibilité de ces séquences à la forme de la loi des temps de réparation. Nous donnerons au chapitre suivant quelques résultats complémentaires permettant une utilisation pratique de ces résultats de sensibilité.

La première étape de notre étude nous amène à la proposition 5.1.5 : si on note R_i les temps de réparations qui interviennent dans la séquence, et \tilde{R}_i les pseudo-variables associées, l'étude de la probabilité d'une séquence menant à la panne se ramène à l'étude de $\mathbb{P}(\tilde{R}_0 > \dots > \tilde{R}_{n-1})$. Par définition de la classe HNBUE, nous savons que cette probabilité est maximale si R_0 est de loi exponentielle (et donc \tilde{R}_0 de loi exponentielle aussi), et R_{n-1} est de loi de Dirac (et donc \tilde{R}_{n-1} de loi uniforme), et minimale dans le cas opposé. En revanche, la situation est beaucoup plus complexe pour les variables intermédiaires. Nous allons donc, pour ces variables intermédiaires, essayer de nous ramener au cas simple des variables R_0 et R_{n-1} .

Nous allons donc, dans la seconde étape de notre étude, utiliser un raisonnement par récurrence. Nous étudierons la probabilité $\mathbb{P}(t < \tilde{R}_i < \tilde{R}_{i-1})$ comme une fonction de t , de façon à la majorer par une expression de la forme ke^{-lt} (pour se ramener à une loi exponentielle), et la minorer par une expression de la forme $k(1 - lt)$ (pour se ramener à une loi uniforme).

Cette probabilité $\mathbb{P}(t < \tilde{R}_i < \tilde{R}_{i-1})$ dépend des lois suivies par \tilde{R}_i et \tilde{R}_{i-1} , qui varient dans un espace assez large. Nous nous ramènerons (par exemple pour le majorant) à une sous famille de cet espace (définies en 5.2.3 et 5.2.6), qui présente la propriété suivante : à t donné, le maximum de $\mathbb{P}(t < \tilde{R}_i < \tilde{R}_{i-1})$ est obtenu pour un certain membre de cette famille. Comme, de plus, cette famille est paramétrée par un réel, l'encadrement devient plus facile à construire. Il reste ensuite à ajuster, sur les maximum et minimum que nous avons calculés, des fonctions de la forme ke^{-lt} ou $k(1 - lt)$.

Pour le choix des constantes l , nous avons choisi de rester le plus proche possible des résultats que l'on obtiendrait avec des lois R_i exponentielles. Cela facilite les comparaisons avec le modèle markovien, qui est d'utilisation aisée. À partir de là, les constantes k sont déterminées. Le calcul de k est facile pour la majoration, mais plus compliqué dans le cas de la minoration. Pour la minoration, nous déterminons k de façon numérique, ce qui nécessite un certain nombre de précautions : montrer que l'on peut contrôler les variations de la fonction étudiée, calculer les limites (ou les équivalents) aux bornes de l'intervalle de définition.

Il nous reste ensuite à faire la synthèse de ces résultats, de façon à encadrer la probabilité des séquences de panne (corollaire 5.4.3). De plus, nous montrons que ces résultats peuvent être un peu étendus, d'une part au cas où certains composants sont irréparables (corollaire 5.4.4), d'autre part au calcul de temps moyen de séjour (corollaires 5.4.5 et 5.4.6).

5.1 Introduction

Commençons par remarquer que l'on peut, dans chaque état du système, considérer qu'il n'y a qu'une seule défaillance possible, en utilisant la proposition suivante.

Proposition 5.1.1 *Soit une famille finie de variables aléatoires indépendantes V_{ij} de lois exponentielles de paramètres respectifs λ_{ij} . On considère $V_i = \min_j V_{ij}$. Alors V_i est de loi exponentielle de paramètre $\lambda_i = \sum \lambda_{ij}$, et on a :*

$$\forall v \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(V_i = V_{ij} \mid V_i > v) = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_i}$$

Cette remarque permet de simplifier l'étude des séquences de panne.

Soient $n+1$ composants réparables, fonctionnant successivement. On s'intéresse à la séquence de panne enchaînant les défaillances des composants 0 à n , sans qu'aucune réparation ait pu avoir lieu à temps. Autrement dit, on veut calculer la probabilité de l'évènement \mathcal{C}_n : à chaque fois, le composant de secours tombe en panne avant que le composant qu'il secourt ait été réparé. Cette séquence représentée sur la figure 5.1.

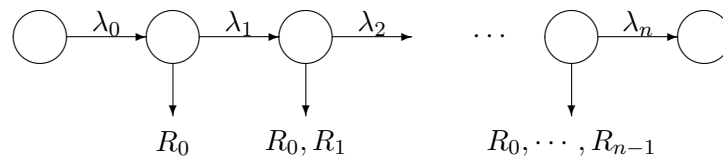


FIG. 5.1 – Séquence accidentelle sans réparation réussie

Hypothèse 5.1.2 *On note :*

- V_i le temps de bon fonctionnement du composant i , c'est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ_i ;
- R_i le temps de réparation du composant i , c'est une variable aléatoire de loi F_i , HNBUE de moyenne r_i .

Alors :

$$\begin{cases} V_1 + \dots + V_n < R_0 \\ \dots \\ V_n < R_{n-1} \end{cases}$$

ou, de façon plus formelle :

$$\mathcal{C}_n = \{\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=i}^n V_j < R_{i-1}\}$$

Remarque : Il faut noter qu'il y a un décalage entre les V_i et les R_i . En effet, le dernier temps de réparation R_n n'interviendra nulle part, ainsi que le premier temps de bon fonctionnement V_0 .

5.1.1 Exemples

Dans la suite nous utiliserons comme illustration les exemples suivants. En particulier, les valeurs numériques nous permettront d'avoir une idée de la qualité des résultats obtenus.

Premier exemple Dans le premier cas, on considère une séquence de longueur n , où tous les taux de défaillance sont égaux à $\lambda = 10^{-1}$, et les temps de réparation à $r = 1$. Alors, si les temps de réparation sont de loi exponentielle :

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_n) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda r}{i + \lambda r} \simeq \frac{(\lambda r)^n}{n!}$$

En effet, pour tout $i \in \{1, \dots, n+1\}$, la probabilité de passer de l'état i à l'état $i+1$ vaut $\frac{\lambda}{\lambda + \frac{i}{r}}$. Le système étant markovien, la probabilité de la séquence est le produit des probabilités de chacune des étapes de la séquence, ce qui donne le résultat annoncé. Le graphique 5.2 est le graphe des états du système dans le cas $n = 3$, avec des temps de réparation exponentiels.

Remarque : Supposer les temps moyens de réparation égaux permet de simplifier les calculs. Il faut cependant noter que, par exemple dans le cas d'une file d'attente, les distributions aussi seraient égales, et il serait possible d'utiliser la proposition 5.1.6. Cette proposition est bien sûr bien meilleure que les encadrements obtenus dans le cas général.

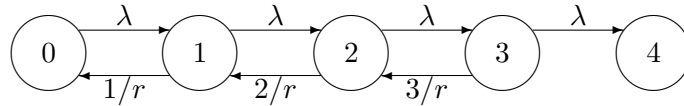


FIG. 5.2 – Graphe correspondant au premier exemple si $n = 3$

Second exemple Dans le second cas, on considère une séquence de longueur $2n$, où tous les taux de défaillance sont égaux à $\lambda = 10^{-1}$, et les temps de réparation à $r = 1$ jusqu'au $n^{\text{ième}}$ état de la séquence, et nuls après. Alors, si les temps de réparation sont de loi exponentielle :

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_n) = \frac{(\lambda r)^{2n}}{(n + \lambda r)^n \prod_{i=1}^n (i + \lambda r)} \simeq \frac{(\lambda r)^{2n}}{n^n n!}$$

Le graphique 5.3 est le graphe des états du système dans le cas $n = 3$, avec des temps de réparation exponentiels.

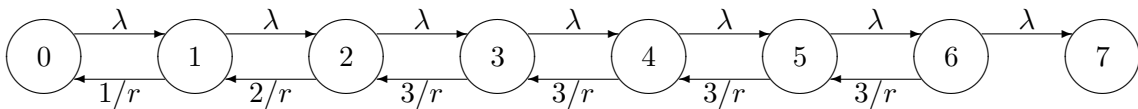


FIG. 5.3 – Graphe correspondant au second exemple si $n = 3$

5.1.2 Résultats préliminaires

Rappelons que les temps de vie et de réparation sont globalement indépendants. Pour calculer la probabilité de la séquence, nous conditionnons par les temps de bon fonctionnement des composants, que nous notons v_i . Le terme $\prod_{i=1}^n \lambda_i e^{-\lambda_i v_i}$ est la densité de probabilité du

conditionnement. Sachant ce conditionnement, la séquence est réalisée si, pour toutes les réparations $\sum_{j=i+1}^n v_j < R_i$, évènement dont la probabilité est $\bar{F}_i\left(\sum_{j=i+1}^n v_j\right)$.

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_n) = \int_{v_1, \dots, v_n \geq 0} \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i e^{-\lambda_i v_i} \right) \bar{F}_0(v_1 + \dots + v_n) \cdots \bar{F}_{n-1}(v_n) dv_1 \cdots dv_n \quad (5.1)$$

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_n) = \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right) \int_{v_1, \dots, v_n \geq 0} \left(\prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i v_i} \right) \bar{F}_0(v_1 + \dots + v_n) \cdots \bar{F}_{n-1}(v_n) dv_1 \cdots dv_n \quad (5.2)$$

Par ailleurs, dans le cas où certains composants sont irréparables, on peut passer à la limite, comme l'indique la proposition suivante :

Proposition 5.1.3 Soient deux fonctions Δ et Ψ de \mathbb{R}^{2n} dans \mathbb{R} telles que :

$$\forall (\lambda_i, r_{i-1})_{1 \leq i \leq n}, \quad \Delta(\lambda_i, r_{i-1}) \leq \mathbb{P}(\mathcal{C}_n) \leq \Psi(\lambda_i, r_{i-1})$$

Soit $I \subset \{1, \dots, n\}$ un ensemble de composants irréparables. Dans ce cas, la probabilité de la séquence est encadrée par :

$$\liminf_{\forall i \in I, r_i \rightarrow +\infty} \Delta(\lambda_i, r_{i-1}) \leq \mathbb{P}(\mathcal{C}_n) \leq \limsup_{\forall i \in I, r_i \rightarrow +\infty} \Psi(\lambda_i, r_{i-1}) \quad (5.3)$$

Preuve : Ici, \mathcal{C}_n désigne la séquence dans le cas où certains composants sont irréparables. Supposer les composants de I irréparables, c'est supposer, dans l'équation 5.2 :

$$\forall i \in I, \forall u \in \mathbb{R}^+, \bar{F}_i(u) = 1$$

Soit alors $\mathcal{C}_n^{(m)}$ une suite de séquences définies par :

- les taux de défaillances sont ceux de \mathcal{C}_n ,
- pour les composants réparables, les temps de réparation sont ceux de \mathcal{C}_n ,
- pour tout i de I , $\bar{F}_i^{(m)}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire HNBUE, de moyenne $r_i^{(m)}$, avec :

$$\forall i \in I, r_i^{(m)} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty$$

Dans [27], on donne un encadrement de la fonction de répartition d'une variable aléatoire HNBUE de moyenne donnée. Le majorant de la fonction de répartition tend vers 0 en 0. Donc :

$$\forall i \in I, \forall u \in \mathbb{R}^+, \bar{F}_i^{(m)}(u) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1$$

Par ailleurs :

$$\forall i \in I, \forall u \in \mathbb{R}^+, \bar{F}_i^{(m)}(u) \leq \bar{F}_i(u) = 1$$

On peut donc utiliser le théorème de convergence dominée :

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_n^{(m)}) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\mathcal{C}_n)$$

Soit maintenant l tel que :

$$l > \limsup_{r_i \rightarrow +\infty} \Psi(\lambda_i, r_{i-1})$$

Alors, pour toute suite $\mathcal{C}_n^{(m)}$, il existe un m_0 tel que :

$$\forall m > m_0, \mathbb{P}(\mathcal{C}_n^{(m)}) < l$$

d'où :

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_n) < l$$

♣

Le terme $\prod_{i=1}^n \lambda_i$ est facile à évaluer. On note :

$$\Lambda = \max_{i=0, \dots, n} \lambda_i$$

L'intégrale apparaissant dans l'équation 5.2 est décroissante par rapport à tous les λ_i , on minore donc $\mathbb{P}(\mathcal{C}_n)$ en remplaçant, dans cette intégrale, tous les λ_i par Λ , et on majore $\mathbb{P}(\mathcal{C}_n)$ en les remplaçant par 0. De plus, on peut remarquer que cet encadrement ne coûte, dans la plupart des cas qui nous intéressent, pas cher en précision, puisque les temps de bon fonctionnement sont censés être tous relativement grands par rapport aux temps de réparation.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{C}_n) &\leq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right) \int_{v_1, \dots, v_n \geq 0} \bar{F}_0(v_1 + \dots + v_n) \cdots \bar{F}_{n-1}(v_n) dv_1 \cdots dv_n \\ \mathbb{P}(\mathcal{C}_n) &\geq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right) \int_{v_1, \dots, v_n \geq 0} e^{-\Lambda(v_1 + \dots + v_n)} \bar{F}_0(v_1 + \dots + v_n) \cdots \bar{F}_{n-1}(v_n) dv_1 \cdots dv_n \end{aligned}$$

On définit :

$$\forall i \in [0, n], u_i = \sum_{j=i}^n v_j$$

Le jacobien de ce changement de variable est égal à 1, sur tout \mathbb{R}^n .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{C}_n) &\leq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right) \int_{0 \leq u_n \leq \dots \leq u_1} \left(\prod_{i=1}^n \bar{F}_{i-1}(u_i) \right) du_1 \cdots du_n \\ \mathbb{P}(\mathcal{C}_n) &\geq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right) \int_{0 \leq u_n \leq \dots \leq u_1} e^{-\Lambda u_1} \left(\prod_{i=1}^n \bar{F}_{i-1}(u_i) \right) du_1 \cdots du_n \end{aligned}$$

C'est ici qu'il est intéressant de faire intervenir la notion de pseudo-variable (voir paragraphe 3.4). Dans la suite, nous utiliserons les variables \tilde{R}_i , pseudo-variables des temps de réparation. Alors, les équations précédentes deviennent :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{C}_n) &\leq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right) \int_{0 \leq u_n \leq \dots \leq u_1} \left(\prod_{i=1}^n f_{\tilde{R}_{i-1}}(u_i) \right) du_1 \cdots du_n \\ \mathbb{P}(\mathcal{C}_n) &\geq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right) \int_{0 \leq u_n \leq \dots \leq u_1} e^{-\Lambda u_1} \left(\prod_{i=1}^n f_{\tilde{R}_{i-1}}(u_i) \right) du_1 \cdots du_n \end{aligned}$$

Il est alors utile de définir les notations suivantes.

Notation 5.1.4 *On note :*

- \mathcal{E}_λ une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ ;
- \mathcal{U}_b une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, b]$.

Ce qui nous permet d'écrire la proposition ci-dessous

Proposition 5.1.5 *Soit :*

- V_i le temps de bon fonctionnement du composant i , de loi exponentielle de paramètre λ_i ;
- R_i le temps de réparation du composant i , de loi F_i de moyenne r_i ;
- \mathcal{C}_n l'évènement défini par :

$$\mathcal{C}_n = \{\forall i \in \{1, \dots, n\} \sum_{j=i}^n V_j < R_{i-1}\}$$

Alors :

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_n) \leq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i r_{i-1} \right) \mathbb{P}(\tilde{R}_0 > \dots > \tilde{R}_{n-1}) \quad (5.4)$$

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_n) \geq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i r_{i-1} \right) \mathbb{P}(\mathcal{E}_\Lambda > \tilde{R}_0 > \dots > \tilde{R}_{n-1}) \quad (5.5)$$

5.1.3 Cas i.i.d.

Dans le cas où toutes les réparations de la séquence ont même loi, les calculs se simplifient très fortement. On obtient des pseudo-variables elles aussi de même loi, et par symétrie :

$$\mathbb{P}(\tilde{R}_0 > \dots > \tilde{R}_{n-1}) = \frac{1}{n!}$$

Pour minorer $\mathbb{P}(\mathcal{C}_n)$, partant de la formule précédente, on a :

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_\Lambda > \tilde{R}_0 > \dots > \tilde{R}_{n-1}) = \frac{1}{n!} \times \mathbb{P}\left(\mathcal{E}_\Lambda > \max_{0 \leq i \leq n-1} (\tilde{R}_i)\right)$$

Il reste à minimiser cette probabilité. Or, elle est décroissante quand les \tilde{R}_i croissent en ordre stochastique. Donc, le minimum est obtenu pour les \tilde{R}_i de loi exponentielle, car les R_i sont HNBUE. Il reste donc à calculer :

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{E}_\Lambda > \max_{0 \leq i \leq n-1} (\mathcal{E}_{\frac{1}{r}})\right)$$

On peut calculer cette probabilité par une méthode analytique.

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{E}_\Lambda > \max_{0 \leq i \leq n-1} (\mathcal{E}_{\frac{1}{r}})\right) = \Lambda \int_0^{+\infty} \left(1 - e^{-\frac{x}{r}}\right)^n e^{-\Lambda x} dx$$

En posant $u = 1 - e^{-\frac{x}{r}}$ puis en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\mathcal{E}_\Lambda > \max_{0 \leq i \leq n-1} \left(\frac{\mathcal{E}_1}{r}\right)\right) &= \Lambda r \int_0^1 u^n (1-u)^{\Lambda r-1} du \\
&= [-u^n (1-u)^{\Lambda r}]_0^1 + \int_0^1 n u^{n-1} (1-u)^{\Lambda r} du \\
&= \prod_{i=0}^n \frac{n-i}{\Lambda r + i} \\
&= \prod_{i=0}^n \frac{i}{\Lambda r + i}
\end{aligned}$$

On obtient finalement la proposition suivante :

Proposition 5.1.6 *L'encadrement de la proposition 5.1.5, dans le cas où les R_i sont i.i.d., devient :*

$$\frac{r^n}{n!} \times \prod_{i=1}^n \lambda_i \times \prod_{i=1}^n \frac{i}{i+r\Lambda} \leq \mathbb{P}(\mathcal{C}_n) \leq \frac{r^n}{n!} \times \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

Remarque : On peut aussi simplifier le calcul de la borne inférieure :

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^n \frac{i}{i+r\Lambda} &= \exp\left(-\sum_{i=1}^n \log\left(1 + \frac{r\Lambda}{i}\right)\right) \\
&\geq \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{r\Lambda}{i}\right) \geq \exp(-r\Lambda(\log n + 1)) \geq (en)^{-r\Lambda}
\end{aligned}$$

Application Dans le cas du premier exemple défini au paragraphe 5.1.1, avec $n = 100$, la borne inférieure vaut 60% de la borne supérieure avec le calcul exact, et 57% avec le calcul simplifié (rappelons que si $n = 100$, la probabilité calculée est de l'ordre de $1e-258$). Pour le second exemple, le résultat ci-dessus est évidemment inapplicable.

5.1.4 Une première majoration

Dans la suite nous chercherons des encadrements des probabilités $\mathbb{P}(X < Y)$ et $\mathbb{P}(t < X < Y)$, où $X \in \mathcal{H}_a$ et $Y \in \mathcal{H}_b$ (voir paragraphe 3.4).

Proposition 5.1.7 *Si $X \in \mathcal{H}_a$ et $Y \in \mathcal{H}_b$, alors :*

$$1 - \frac{a}{b}(1 - e^{-\frac{b}{a}}) \leq \mathbb{P}(X < Y) \leq \frac{1 - e^{-\frac{a}{b}}}{\frac{a}{b}}$$

Preuve : Cette probabilité croît quand Y croît en ordre stochastique, ou quand X décroît en ordre stochastique. Or, d'après 3.4, $\mathcal{U}_a \underset{\text{st}}{\leq} X \underset{\text{st}}{\leq} \mathcal{E}_{\frac{1}{a}}$, un encadrement de même type étant aussi valide pour Y . Donc :

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{E}_{\frac{1}{a}} < \mathcal{U}_b\right) \leq \mathbb{P}(X < Y) \leq \mathbb{P}\left(\mathcal{U}_a < \mathcal{E}_{\frac{1}{b}}\right)$$

♣

Notation 5.1.8 Nous utiliserons les notations suivantes pour les bornes de l'encadrement :

$$m(a, b) = 1 - \frac{a}{b}(1 - e^{-\frac{b}{a}})$$

$$M(a, b) = \frac{1 - e^{-\frac{a}{b}}}{\frac{a}{b}}$$

Le résultat précédent permet de majorer la probabilité d'un ordonnancement donné de n variables :

Proposition 5.1.9 Si les X_i sont des variables aléatoires réelles indépendantes :

$$\mathbb{P}(X_0 > \dots > X_{n-1}) \leq \mathbb{P}(X_0 > X_1) \times \dots \times \mathbb{P}(X_{n-2} > X_{n-1})$$

Preuve : L'inégalité de Tchebitchef énonce que, si f est croissante et g décroissante sur un intervalle $[c, d]$, et μ une probabilité :

$$\int_c^d f(u)g(u)d\mu(u) \leq \int_c^d f(u)d\mu(u) \times \int_c^d g(u)d\mu(u)$$

On note F_i la fonction de répartition de X_i . La démonstration se fait alors par récurrence :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_0 > \dots > X_{n-1}) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X_0 > u > X_2 > \dots > X_{n-1}) dF_1(u) \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X_0 > u) \times \mathbb{P}(u > X_2 > \dots > X_{n-1}) dF_1(u) \\ &\leq \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X_0 > u) dF_1(u) \times \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(u > X_2 > \dots > X_{n-1}) dF_1(u) \\ &= \mathbb{P}(X_0 > X_1) \times \mathbb{P}(X_1 > \dots > X_{n-1}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Le passage à l'équation 5.6 demande l'indépendance des différentes variables. ♣

Cette proposition a une application pratique dans le cadre qui nous intéresse ; elle donne une majoration de la probabilité d'une séquence.

Corollaire 5.1.10 En reprenant les hypothèses 5.1.2, la probabilité d'une séquence \mathcal{C}_n est majorée par :

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_n) \leq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i r_{i-1} \right) \left(\prod_{i=2}^n \frac{1 - e^{-\frac{r_i}{r_{i-1}}}}{\frac{r_i}{r_{i-1}}} \right)$$

De plus, ce résultat peut être étendu au cas de séquences comprenant certains composants irréparables.

Corollaire 5.1.11 Soit $I \subset \{1, \dots, n\}$ un ensemble de composants irréparables, ne comprenant pas le composant 1, et aucune paire de composants consécutifs ($\forall i \in I, i-1 \notin I$ et $i+1 \notin I$). Alors, la probabilité de la séquence \mathcal{C}_n est majorée par :

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_n) \leq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right) \left(\prod_{i=0, i \notin I}^{n-1} r_i \right) \prod_{i=2, i \notin I, i-1 \notin I}^n \left(\frac{1 - e^{-\frac{r_i}{r_{i-1}}}}{\frac{r_i}{r_{i-1}}} \right)$$

Preuve : Il suffit d'étudier le terme suivant :

$$r_i \times \frac{1 - e^{-\frac{r_i}{r_{i-1}}}}{\frac{r_i}{r_{i-1}}} \times \frac{1 - e^{-\frac{r_{i+1}}{r_i}}}{\frac{r_{i+1}}{r_i}} = \frac{r_i r_{i-1}}{r_{i+1}} \times \left(1 - e^{-\frac{r_i}{r_{i-1}}} \right) \times \left(1 - e^{-\frac{r_{i+1}}{r_i}} \right)$$

car tous les autres termes de la majoration du corollaire 5.1.10 sont constants. Or, ce terme tend vers r_{i-1} quand r_i tend vers l'infini. \clubsuit

En revanche, quand deux composants consécutifs sont irréparables, l'expression tend vers l'infini.

Application Dans le cas du premier exemple défini au paragraphe 5.1.1, le majorant de la probabilité de la séquence est $(\lambda r)^n (1 - e^{-1})^{n-1}$. Donc, le rapport entre le majorant et le cas markovien est de l'ordre de $n! \times (1 - e^{-1})^{n-1}$.

n	2	3	5	7	11
majorant/Markov	1e0	3e0	2e1	4e2	5e5
Markov	4e-3	1e-4	7e-7	2e-10	2e-18

En revanche, pour le second exemple, le corollaire 5.1.10 est inutilisable, car la séquence comprend plusieurs composants irréparables successifs dès que $n > 1$.

5.2 Construction d'une famille extrême

Notre but dans ce qui suit est d'améliorer le majorant et d'obtenir un minorant. Pour cela, il faut tenir compte, pour quand on traite le cas d'une variable \tilde{R}_i , du fait que cette variable est inférieure aux précédentes \tilde{R}_i . Nous étudierons donc la probabilité $\mathbb{P}(t < X < Y)$ comme une fonction de t , de façon à la majorer par une expression de la forme ke^{-lt} , et la minorer par une expression de la forme $k(1 - lt)$.

Commençons par étudier la dérivée de cette fonction.

Lemme 5.2.1 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles :

$$\frac{d\mathbb{P}(t < X < Y)}{dt} = -f_X(t^+) \bar{F}_Y(t^+)$$

Nous pouvons dès maintenant proposer un minorant :

Corollaire 5.2.2 Si $X \in \mathcal{H}_a$ et $Y \in \mathcal{H}_b$, la pente vaut $-\frac{1}{a}$ en 0, chaque fonction $\mathbb{P}(t < X < Y)$ est convexe en t et on a :

$$\left(m(a, b) - \frac{t}{a} \right)_+ \leq \min_{X \in \mathcal{H}_a, Y \in \mathcal{H}_b} \mathbb{P}(t < X < Y)$$

Preuve : La valeur de la dérivée et la convexité viennent de l'appartenance à \mathcal{H}_a et \mathcal{H}_b . Puisque chaque fonction $\mathbb{P}(t < X < Y)$ est convexe en t , elle est supérieure à la tangente en ce point. Cette inégalité s'étend ensuite au minimum de toutes ces fonctions. ♣

Pour faire mieux que cette minoration, nous aurons besoin d'outils supplémentaires, qui nous permettront d'étudier les encadrements de $\mathbb{P}(t < X < Y)$ de manière plus systématique. Ces outils seront les familles de fonctions \mathcal{F}_a^+ et \mathcal{F}_a^- .

Un élément F_α (on omet l'indice a) de \mathcal{F}_a^+ a l'aspect décrit (pour $a = 1$) par la figure 5.4 : la fonction F_α est d'abord égale à la fonction de répartition de la loi exponentielle de moyenne a , puis elle devient une fonction affine en conservant la même tangente, et s'arrête à 1.

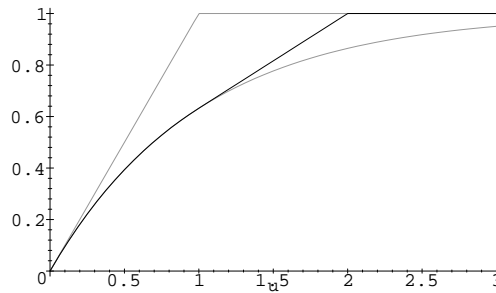


FIG. 5.4 – Fonctions utilisées pour les calculs de majorants

Notation 5.2.3 Une fonction $F_\alpha(u)$, de la famille \mathcal{F}_a^+ est définie par :

$$\begin{cases} F_\alpha(u) = 1 - e^{-\frac{u}{a}} & \text{si } u \in [0, \alpha[\\ F_\alpha(u) = (u - \alpha) \times \frac{e^{-\frac{\alpha}{a}}}{a} + (1 - e^{-\frac{\alpha}{a}}) & \text{si } u \in [\alpha, \alpha + a[\\ F_\alpha(u) = 1 & \text{si } u \in [\alpha + a, +\infty[\end{cases}$$

Ces fonctions ont l'intérêt suivant.

Proposition 5.2.4 Pour tout u réel positif, la fonction $\alpha \mapsto F_\alpha(u)$ est continue et décroissante.

Preuve : Notons G_α la fonction définie par :

$$\begin{aligned} G_\alpha(u) &= 1 - e^{-\frac{u}{a}} & \text{si } u \in [0, \alpha[\\ G_\alpha(u) &= (u - \alpha) \times \frac{e^{-\frac{\alpha}{a}}}{a} + (1 - e^{-\frac{\alpha}{a}}) & \text{si } u \in [\alpha, +\infty[\end{aligned}$$

Alors, $G'_\alpha(u) = \max(e^{-\frac{u}{a}}, e^{-\frac{\alpha}{a}})$. Cette dérivée est le maximum de deux fonctions décroissantes en α elle est donc décroissante en α , et sa primitive G_α aussi. De plus, elle est continue. Or $F_\alpha = \min(G_\alpha, 1)$. C'est donc le minimum de deux fonctions continues décroissantes en α , donc F_α est continue décroissante en α . ♣

Proposition 5.2.5 Soient F fonction de répartition d'une variable aléatoire de \mathcal{H}_a et u_0 un réel positif. Alors il existe un unique réel α tel que la fonction F_α de \mathcal{F}_a^+ vérifie :

$$\begin{aligned} F_\alpha(u_0) &= F(u_0) \\ \forall u < u_0 \quad F_\alpha(u) &\leq F(u) \\ \forall u > u_0 \quad F_\alpha(u) &\geq F(u) \end{aligned}$$

Preuve : On considère :

$$\alpha_0 = \min \{ \alpha \in \mathbb{R}^+ \mid G_\alpha(u_0) \leq F(u_0) \}$$

L'ensemble est non-vidé parce que $G_{u_0}(u_0) = 1 - e^{-\frac{u_0}{a}} \leq F(u_0)$ et que G_α est continue en α . Donc, α_0 existe.

De plus, comme $G_{u_0}(u_0) \leq F(u_0)$, et que G_α est décroissante en α , on sait que $\alpha_0 \leq u_0$. Sur l'intervalle $[0, \alpha_0]$, on sait que $F - G_{\alpha_0} \geq 0$ car $F(u) \geq 1 - e^{-\frac{u}{a}}$. Sur l'intervalle $[\alpha_0, +\infty[$, $F - G_{\alpha_0}$ est concave, car F concave et G_{α_0} affine.

Il faut maintenant distinguer deux cas : $(F - G_{\alpha_0})(\alpha_0) = 0$, ou bien $(F - G_{\alpha_0})(\alpha_0) > 0$. Dans le premier cas, la dérivée à droite de $F - G_{\alpha_0}$ en α_0 est négative. En effet, la fonction F étant concave, elle est dérivable à droite et à gauche en tout point, la dérivée à droite étant partout inférieure à la dérivée à gauche. Par ailleurs, G_{α_0} est partout dérivable. Donc $F - G_{\alpha_0}$ est dérivable à droite et à gauche en tout point, avec une dérivée à droite partout inférieure à la dérivée à gauche. Or $F - G_{\alpha_0} \geq 0$ sur l'intervalle $[0, \alpha_0]$, donc sa dérivée à gauche en α_0 est négative, et sa dérivée à droite aussi. La fonction $F - G_{\alpha_0}$ est alors décroissante sur $[\alpha_0, +\infty[$, positive avant u_0 et négative après.

Sinon, la fonction $F - G_{\alpha_0}$ est strictement décroissante en u_0 , strictement positive entre α_0 et u_0 et strictement négative après u_0 .

Pour conclure, puisque $F \leq 1$, alors :

$$F \leq G_{\alpha_0} \Leftrightarrow F \leq \min(G_{\alpha_0}, 1)$$

♣

La famille \mathcal{F}_a^- est définie de façon symétrique : ces fonctions sont d'abord égales à la fonction de répartition de la loi uniforme, puis rejoignent la fonction de répartition de la loi exponentielle par interpolation linéaire tangente.

Notation 5.2.6 Une fonction $F_\beta(u)$, de la famille \mathcal{F}_a^- est définie par :

$$\begin{cases} F_\beta(u) = \frac{u}{a} & \text{si } u \in [0, u_\beta[\\ F_\beta(u) = (u - \beta) \times \frac{e^{-\frac{\beta}{a}}}{a} + (1 - e^{-\frac{\beta}{a}}) & \text{si } u \in [u_\beta, \beta[\\ F_\beta(u) = 1 - e^{-\frac{u}{a}} & \text{si } u \in [\beta, +\infty[\end{cases}$$

$$\text{en posant } u_\beta = \frac{a - (\beta + a)e^{-\frac{\beta}{a}}}{1 - e^{-\frac{\beta}{a}}}.$$

Ces fonctions ont les propriétés symétriques des fonctions de \mathcal{F}_a^+ , à une différence près : les démonstrations se feront en partant de $+\infty$ et non de 0, et la troncature se fait par $\min(G_\beta, \frac{u}{a})$. Nous aurons par ailleurs besoin d'une propriété qui n'a pas d'équivalent dans la famille \mathcal{F}_a^+ .

Lemme 5.2.7 La fonction $\beta \mapsto u_\beta$ est continue, nulle en 0, croissante, concave, et possède un inverse continu, nul en 0, croissant, convexe

Preuve : Les seules propriétés à montrer sont en fait la croissance et la concavité.

$$\begin{aligned}\frac{du_\beta}{d\beta} &= e^{-\frac{\beta}{a}} \left(\beta - a + e^{-\frac{\beta}{a}} a \right) \left(-1 + e^{-\frac{\beta}{a}} \right)^{-2} a^{-1} \\ \frac{d^2u_\beta}{d\beta^2} &= e^{-\frac{\beta}{a}} \left(-2a + 2e^{-\frac{\beta}{a}} a + \beta + e^{-\frac{\beta}{a}} \beta \right) \left(-1 + e^{-\frac{\beta}{a}} \right)^{-3} a^{-2}\end{aligned}$$

Montrer que la dérivée seconde est négative revient à montrer que :

$$\forall \beta \geq 0, 2a + 2e^{-\frac{\beta}{a}} a + \beta + e^{-\frac{\beta}{a}} \beta \geq 0$$

La dérivée de cette expression est nulle en 0, et sa dérivée seconde est $e^{-\frac{\beta}{a}} \beta a^{-2}$, qui est positif. ♣

Notation 5.2.8 Dans le cas markovien, $\mathbb{P}(X < Y) = \frac{b}{b+a}$. Dans la suite, nous noterons cette valeur p .

5.3 Encadrements

5.3.1 Majoration

Théorème 5.3.1 Pour tout réel l :

$$\begin{aligned}l &\leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow \exists k \text{ tel que} \\ \forall t \in \mathbb{R}^+, \forall X \in \mathcal{H}_a, \forall Y \in \mathcal{H}_b \\ \mathbb{P}(t < X < Y) &\leq k \times e^{-lt}\end{aligned}$$

De plus, il existe une unique valeur de k donnant une majoration optimale (qui ne peut pas être améliorée sur tout \mathbb{R}^+) parmi les majorations de la forme ke^{-lt} si et seulement si $l \geq \frac{1}{aM(a,b)}$.

Preuve : Nous allons réduire le problème aux fonctions F_α de \mathcal{F}_a^+ . Soit F_X la fonction de répartition de X . La probabilité qui nous intéresse, à t fixé, se calcule :

$$\mathbb{P}(t < X < Y) = \int_t^{+\infty} (F_X(u) - F_X(t)) f_Y(u) du$$

Soit F_α l'élément de \mathcal{F}_a^+ passant par le point $(t, F_X(t))$ (cf. proposition 5.2.5). Nous savons que $F_\alpha(t) = F_X(t)$, alors que $F_\alpha(u) \geq F_X(u)$ sur tout l'intervalle d'intégration : la probabilité qui nous intéresse est donc augmentée.

Par ailleurs, en écrivant que :

$$\mathbb{P}(t < X < Y) = \int_t^{+\infty} f_X(u) \bar{F}_Y(u) du$$

on constate que la probabilité recherchée diminue quand Y augmente en ordre stochastique : le maximum est donc obtenu pour Y suivant une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{b}$.

Il faut maintenant étudier les relations entre α et t . Il est évident que si $t \leq \alpha$, $F_\alpha(t)$ est constant quand α varie. Comme, par ailleurs, pour tout u , $\alpha \mapsto F_\alpha(u)$ est décroissant, la probabilité recherchée est décroissante en α . L'optimum ne peut donc pas être à l'intérieur de

ce domaine. Par ailleurs, si $t \geq \alpha + a$, la probabilité recherchée vaut 0. Il faut donc $t \in [\alpha, \alpha + a]$. On pose $t = \alpha + d$, avec $d \in [0, a]$. Alors :

$$\mathbb{P}(t < X < Y) = e^{-\alpha(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})} \frac{e^{-\frac{d}{b}} - e^{-\frac{a}{b}}}{\frac{a}{b}}$$

Il faut donc $\forall d \in [0, a]$, et $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} e^{-\alpha(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})} \frac{e^{-\frac{d}{b}} - e^{-\frac{a}{b}}}{\frac{a}{b}} &\leq k e^{-l(\alpha + d)} \\ \Leftrightarrow \frac{e^{-\frac{d}{b}} - e^{-\frac{a}{b}}}{\frac{a}{b}} \times e^{ld} &\leq k e^{\alpha(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - l)} \end{aligned}$$

Comme $l \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, le terme de droite est croissant en α , et en notant :

$$j(d) = \frac{e^{-\frac{d}{b}} - e^{-\frac{a}{b}}}{\frac{a}{b}} \times e^{ld}$$

il suffit de prendre $k = \max_{d \in [0, a]} j(d)$. Il reste à étudier dans quels cas cette majoration peut être améliorée. On a :

$$j'(0) \geq 0 \Leftrightarrow l \geq \frac{1}{aM(a, b)}$$

Par ailleurs, pour tout $d > 0$, $j(d)$ est strictement croissant en l . Il faut donc examiner deux cas.

- Si $l \geq \frac{1}{aM}$, le maximum de $j(d)$ est atteint sur $]0, a]$, et k est donc une fonction strictement croissante de l : une diminution du terme e^{-lt} se traduit donc par une augmentation du terme k , et la majoration ne peut pas être améliorée sur tout \mathbb{R}^+ .
- Sinon, le maximum est atteint en 0, il est indépendant de l : on dégrade donc partout la majoration en diminuant l .



Remarque : Il existe des l vérifiant $\frac{1}{aM(a, b)} \leq l \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, car $M(a, b) > \frac{b}{a+b}$. En effet, M est la plus grande valeur possible de $\mathbb{P}(X < Y)$, alors que $\frac{b}{a+b}$ est celle obtenue dans le cas markovien.

Dans cette famille de majorations, nous étudierons un cas extrême.

Corollaire 5.3.2 Si $X \in \mathcal{H}_a$ et $Y \in \mathcal{H}_b$, alors :

$$\mathbb{P}(t < X < Y) \leq e \times p^{\frac{1}{1-p}} \times e^{-t(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})}$$

où $p = \frac{b}{b+a}$ est la valeur de $\mathbb{P}(X < Y)$ dans le cas markovien.

Preuve : Si $l = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, la dérivée $j'(d)$ s'annule pour $d = -\ln(\frac{b+a}{b})b + a$. Tous calculs faits, le maximum vaut $e \times p^{\frac{1}{1-p}}$.



Notation 5.3.3 On note $p_M(p) = e \times p^{\frac{1}{1-p}}$.

Remarquons que $p_m \sim ep$ en 0, et $p_m(1) = 1$.

5.3.2 Minoration

L'étude de la minoration est un peu plus complexe que celle de la majoration, mais repose sur la même idée.

Proposition 5.3.4 *Si $X \in \mathcal{H}_a$ et $Y \in \mathcal{H}_b$, le minimum de $\mathbb{P}(t < X < Y)$ est atteint pour Y suivant une loi uniforme, et X suivant une loi de la forme F_β , avec β tel que $u_\beta = t$.*

Preuve : Le seul point nouveau à montrer est que $u_\beta = t$. On rappelle que la probabilité étudiée s'exprime $\int_t^{+\infty} (F_\beta(u) - F_\beta(t))f_Y(u)du$.

Si $u_\beta \leq t$:

- $F_\beta(u) - F_\beta(t) = \frac{e^{-\frac{\beta}{a}}}{a}(u - t)$ si $u < \beta$
- $F_\beta(u) - F_\beta(t) = 1 - e^{-\frac{u}{a}} - F_\beta(t)$ sinon.

Cette différence est donc décroissante en fonction de β : pour minimiser la probabilité dans le cas $u_\beta \leq t$, il faut $u_\beta = t$.

Par ailleurs, si $u_\beta \geq t$:

- $F_\beta(t)$ ne dépend pas de β ,
- $F_\beta(u)$ est croissant en β .

Ainsi la différence est croissante en β : pour minimiser la probabilité dans le cas $u_\beta \geq t$, il faut là aussi $u_\beta = t$. ♣

Notation 5.3.5 *On note :*

$$P_m(t) = \min_{X \in \mathcal{H}_a, Y \in \mathcal{H}_b} \mathbb{P}(t < X < Y)$$

Pour exprimer $P_m(t)$, il faut distinguer trois cas, selon les valeurs respectives de b et β .

$$P_m(t) = \int_t^\beta \frac{e^{-\frac{\beta}{a}}}{a} \left(1 - \frac{u}{b}\right) du + \int_\beta^b \frac{e^{-\frac{u}{a}}}{a} \left(1 - \frac{u}{b}\right) du \quad \text{si } b \in [\beta, +\infty[\quad (5.7)$$

$$P_m(t) = \int_t^b \frac{e^{-\frac{\beta}{a}}}{a} \left(1 - \frac{u}{b}\right) du \quad \text{si } b \in [t, \beta] \quad (5.8)$$

$$P_m(t) = 0 \quad \text{si } b \in [0, t] \quad (5.9)$$

On rappelle que, dans tous ces cas, on a $u_\beta = t$.

Proposition 5.3.6 *Avec les notations précédentes :*

$$P_m(t) = 0 \Leftrightarrow t \geq \min(a, b)$$

De plus :

$$\frac{dP_m}{dt}(\min(a, b)) = 0$$

Preuve : D'après le lemme 5.2.1, on sait que, pour des lois données pour les variables X et Y , on a

$$\frac{d\mathbb{P}(t < X < Y)}{dt} = -f_X(t^+) \bar{F}_Y(t^+)$$

Or, d'après la proposition 5.3.4, les lois à considérer sont les lois de \mathcal{H}_a^- pour X et la loi uniforme pour Y . On a :

$$f_\beta(t^+) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{\beta}{a}}}{a} & \text{si } t < a \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\bar{F}(t^+) = \left(1 - \frac{t}{b}\right)_+$$

Donc, quelle que soit la valeur de β , $\frac{dP_m}{dt}(t) = 0$ si et seulement si $t \geq \min(a, b)$. Ainsi, sur ce même intervalle :

$$P_m(t) = \lim_{u \rightarrow +\infty} P_m(u) = 0$$

Pour les mêmes raisons, il est clair que $\frac{dP_m}{dt}(b) = 0$. En ce qui concerne la valeur en a , on commence par calculer le taux d'accroissement de P_m pour une valeur de β telle que $u_\beta < t$:

$$\frac{P_m(a) - P_m(t)}{a - t} \geq \frac{-e^{-\frac{\beta}{a}}}{a} \left(1 - \frac{t}{b}\right)$$

Or, quand t tend vers a , β tend vers l'infini, et $e^{-\frac{\beta}{a}}$ vers 0. Le taux d'accroissement tend donc vers 0. ♣

Théorème 5.3.7 Pour tout réel l :

$$l > \frac{1}{\min(a, b)} \Leftrightarrow \exists k > 0 \text{ tel que} \\ \forall t \in \mathbb{R}^+, \forall X \in \mathcal{H}_a, \forall Y \in \mathcal{H}_b \\ \mathbb{P}(t < X < Y) \geq k \times (1 - lt)$$

De plus, il existe une valeur de k donnant une minoration optimale (qui ne peut pas être améliorée sur tout \mathbb{R}^+) parmi les minoration de la forme $k \times (1 - lt)$ si et seulement si $l \leq \frac{1}{\min(a, b)}$.

Preuve : Examinons d'abord le cas $l > \frac{1}{\min(a, b)}$: dans ce cas, $[0, \frac{1}{l}[$ est strictement inclus dans $[0, \min(a, b)[$, et sur cet intervalle, $P_m(t) > 0$. Donc :

$$\frac{P_m(t)}{1 - lt} \xrightarrow[t \rightarrow \frac{1}{l}]{} +\infty$$

Donc :

$$\inf_{t \in [0, \frac{1}{l}[} \frac{P_m(t)}{1 - lt} > 0$$

Si $l < \frac{1}{\min(a,b)}$, on a :

$$\begin{aligned} P_m(\min(a,b)) &= 0 \\ 1 - l \min(a,b) &> 0 \end{aligned}$$

La seule valeur possible de k est donc 0.

Enfin, si $l = \frac{1}{\min(a,b)}$,

$$\frac{P_m(t)}{1-lt} \xrightarrow{t \rightarrow \min(a,b)} \frac{1}{l} \times \frac{dP_m}{dt}(\min(a,b)) = 0$$

De nouveau, la seule valeur possible de k est 0.

Enfin, le fait que la minoration ne puisse pas être améliorée sur tout \mathbb{R}^+ si et seulement si $l \leq \frac{1}{\min(a,b)}$ est une conséquence directe du corollaire 5.2.2, en utilisant les mêmes techniques que pour le théorème 5.3.1. ♣

Étudions maintenant le calcul de ce minimum.

Proposition 5.3.8 *La fonction $\frac{P_m(t)}{1-lt}$ n'a qu'un seul minimum local sur $[0, \frac{1}{l}[$.*

Preuve : Posons $f(t) = P_m(t)$ et $g(t) = 1-lt$. Alors, le nombre de minima locaux du rapport est le nombre de racines de l'équation $f'g - fg' = 0$. Or, $(f'g - fg')' = f''g - fg''$, et de plus : $g'' = 0$, $f' \geq 0$ et $g \geq 0$. Donc $(f'g - fg')' \geq 0$, l'équation $f'g - fg' = 0$ n'a qu'une seule solution ou qu'un seul intervalle de solutions, et $\frac{f}{g}$ un seul minimum local. ♣

Par symétrie avec la majoration, et pour nous rapprocher du cas markovien, nous étudierons le cas $l = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Proposition 5.3.9 *Si $l = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, la valeur optimale de k ne dépend que du rapport $\frac{a}{b}$.*

Preuve : En posant $t' = \frac{t}{a}$, on a :

$$\mathbb{P}(t < X < Y) \geq k \times (1-lt) \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(t' < \frac{X}{a} < \frac{Y}{a}\right) \geq k \times (1-alt')$$

L'inéquation de droite ne dépend que de $\frac{a}{b}$, puisque $\frac{X}{a}$ est de moyenne 1, $\frac{Y}{a}$ est de moyenne $\frac{b}{a}$, et que $al = 1 + \frac{a}{b}$. ♣

Notation 5.3.10 *Si k est une fonction de $\frac{a}{b}$, c'est aussi une fonction de $p = \frac{b}{b+a}$, qui est la valeur de $\mathbb{P}(X < Y)$ obtenue dans le cas markovien. On notera donc $p_m(p)$ le nombre k obtenu pour les valeurs de a et b telles que $p = \frac{b}{b+a}$.*

Le calcul de p_m est relativement simple, puisqu'il n'y a qu'un seul minimum local, qui est aussi un minimum global. Malheureusement, il ne semble pas possible de donner une expression analytique simple de p_m .

5.3.3 Calcul pratique de la fonction p_m pour la minoration

Nous proposons ici une méthode explicite de calcul du meilleur minorant p_m tel que :

$$\forall X \in \mathcal{H}_a, \forall Y \in \mathcal{H}_b, \forall t \in \mathbb{R}^+, \mathbb{P}(t < X < Y) \geq p_m \times \left(1 - t \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right)$$

Pour simplifier les notations, on supposera dans ce chapitre que $a = 1$, ce qui implique $p = \frac{b}{b+1}$, et que $l = 1 + \frac{1}{b} = \frac{1}{p}$. Pour chacune des propriétés de ce chapitre, nous choisirons la notation qui convient le mieux.

Étude locale et aux bornes

Puisque nous intéressons à un minorant, nous devons examiner les petites valeurs de p_m , qui sont obtenues pour de petites valeurs de p , ou de b . Autrement dit, il faut construire un équivalent de p_m en 0.

Proposition 5.3.11 *La fonction $p \mapsto p_m$ a pour équivalent en 0 :*

$$p_m(p) \underset{p \rightarrow 0}{\sim} 2p^2$$

Preuve : Sur l'intervalle $[0, b]$, $f_\beta(u)$ est décroissant, donc minoré par $f_\beta(b)$. Or, $f_\beta(b)$ peut prendre deux valeurs : $e^{-\frac{b}{a}}$ ou $e^{-\frac{\beta}{a}}$. Dans ce second cas, cela signifie que $u_\beta < b$.

Or, la fonction qui à β associe u_β est croissante en fonction de β , continue et nulle en 0. Elle a donc un inverse, lui aussi continu croissant et nul en 0. On a donc :

$$\min_{u \in [0, b]} f_\beta(u) \underset{b \rightarrow 0}{\longrightarrow} 1$$

Or :

$$\int_t^b \left(1 - \frac{u}{b}\right) du \geq P_m(t) \geq \int_t^b \min_{u \in [0, b]} f_\beta(u) \left(1 - \frac{u}{b}\right) du$$

Donc :

$$\frac{(b-t)^2}{2b} \geq P_m(t) \geq \frac{(b-t)^2}{2b} \min_{u \in [0, b]} f_\beta(u)$$

On écarte le terme $\min_{u \in [0, b]} f_\beta(u)$ pour la recherche de p_m . Il reste donc à calculer :

$$\min_{t \in [0, \frac{b}{b+1}[} \frac{\frac{(b-t)^2}{2b}}{1 - t \left(1 + \frac{1}{b}\right)}$$

ce qui donne le résultat annoncé. ♣

Il faut aussi étudier ce qui se passe pour p proche de 1.

Proposition 5.3.12 *La fonction p_m tend vers 1 quand p tend vers 1 (ou b vers l'infini).*

Preuve : Pour simplifier les calculs, et par convexité de P_m , on cherche à minorer $P_m(u)$ par une tangente $\mathcal{T}(u)$. En effet, dans ce cas :

$$\min_{u \in [0, p[} \frac{P_m(u)}{1 - \frac{u}{p}} \geq \min_{u \in [0, p[} \frac{\mathcal{T}(u)}{1 - \frac{u}{p}}$$

Pour que ce minimum soit non nul, il faut que $\mathcal{T}(p) > 0$, et le minimum est alors $\mathcal{T}(0)$. Pour montrer le résultat annoncé, il faut donc les deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(p) &> 0 \\ \mathcal{T}(0) &\underset{b \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

Il n'est d'ailleurs pas nécessaire que la première condition soit vraie pour tout b , il suffit qu'elle le soit à partir d'un certain rang. Si t est le point auquel on calcule la tangente :

$$\mathcal{T}(u) = P_m(t) + (u - t) \frac{dP_m(t)}{dt}$$

Or, les calculs ne sont possibles qu'à partir de β . Au lieu de choisir un t , nous choisirons donc un β , et nous utiliserons le fait que $\frac{dP_m(t)}{dt} = \frac{dP_m(t)}{d\beta} \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^{-1}$.

Nous choisirons :

$$\beta = \frac{2}{b}$$

En effet, d'après l'observation des calculs numériques de p_m , il semble que le β optimal soit de cette forme lorsque β est grand. Alors, l'expression valide de $P_m(t)$ est :

$$P_m(t) = \int_t^\beta \frac{e^{-\frac{\beta}{a}}}{a} \left(1 - \frac{u}{b}\right) du + \int_\beta^b \frac{e^{-\frac{u}{a}}}{a} \left(1 - \frac{u}{b}\right) du$$

Les calculs nécessaires pour transformer ces équations sont relativement longs, on pourra consulter le fichier Maple qui les automatise en annexe 9.2.3 :

$$\mathcal{T}(0) = \frac{-e^{-\frac{2}{b}} N1}{2b^3 \left(1 - e^{-\frac{2}{b}}\right)^2}$$

avec :

$$\begin{aligned} N1 = & 2b + 2e^{-\frac{b^2+4}{b}} b^2 + 2b^3 - 4e^{-\frac{b^2+2}{b}} b^2 - b^2 - 4e^{-4b^{-1}} \\ & + 3e^{-4b^{-1}} b^2 + 6be^{-2b^{-1}} + 2e^{-4b^{-1}} b^3 - 4b^3 e^{-2b^{-1}} - 2e^{-4b^{-1}} b \\ & - 2e^{-6b^{-1}} b^2 - 2e^{-6b^{-1}} b + 2e^{-b} b^2 \end{aligned}$$

À partir de cette expression, on montre que $\mathcal{T}(0) \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} 1$. Par ailleurs :

$$\mathcal{T}(p) = \frac{-e^{-\frac{2}{b}} N2}{2(b+1)b^3 \left(1 - e^{-\frac{2}{b}}\right)^2}$$

avec :

$$\begin{aligned} N2 = & 4e^{-\frac{b^2+2}{b}} b^3 - 2b^3 + 2b - 2e^{-b} b^2 + 2e^{-2b^{-1}} b^2 + 6e^{-4b^{-1}} b \\ & + 5b^3 e^{-2b^{-1}} + 4e^{-4b^{-1}} - 7e^{-4b^{-1}} b^2 - 6be^{-2b^{-1}} - 4e^{-4b^{-1}} b^3 \\ & + 4e^{-6b^{-1}} b^2 + 2e^{-6b^{-1}} b - 2e^{-b} b^3 + b^2 - 2e^{-\frac{b^2+4}{b}} b^3 \\ & - 2e^{-\frac{b^2+4}{b}} b^2 + 4e^{-\frac{b^2+2}{b}} b^2 + e^{-6b^{-1}} b^3 \end{aligned}$$

Il nous suffit de montrer que $\mathcal{T}(p)$ est positif à partir d'une certaine valeur de b . Or :

$$N2 \underset{b \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{4}{3} \times \frac{1}{b}$$

ce qui finit la démonstration. ♣

Enfin, il faut pouvoir contrôler les variations de $p_m(p)$ entre deux valeurs de p , ce que nous permet le résultat suivant.

Proposition 5.3.13 *La fonction $p \mapsto p \times p_m(p)$ est croissante.*

Preuve : Il suffit de remarquer que :

$$p \times \frac{P_m(t)}{1 - t(1 + \frac{1}{b})} = \frac{P_m(t)}{\frac{p-t}{p^2}}$$

Le dénominateur est positif et décroissant en p , le numérateur croissant. Le rapport est donc croissant en p , et son minimum pour $t \in [0, p[$ aussi ♣

Choix de l'expression à optimiser

Nous savons maintenant comment calculer p_m aux bornes de l'intervalle de définition. De plus, nous savons, grâce à la croissance de $p_m(p) \times p$, que nous pouvons interpoler p_m entre deux valeurs de p . Il nous reste donc à calculer p_m pour un grand nombre de valeurs de b .

Or, la fonction P_m a deux expressions différentes, selon les valeurs respectives de b et β . Laquelle des deux utiliser pour rechercher le minimum, pour une valeur donnée de b ?

Pour une valeur donnée de b , on note :

$$j(t) = \frac{P_m(t)}{1 - lt}$$

Nous avons d'après la proposition 5.3.8 que l'équation

$$\frac{dj}{dt}(t) = 0$$

n'a qu'une seule solution en t . Or, il faut que $t = u_\beta$, et u_β est une fonction croissante de β . Donc, l'équation

$$\frac{dj}{d\beta}(u_\beta) = 0$$

n'a qu'une seule solution en β . Alors,

- si $\frac{dj}{d\beta}(u_b) < 0$ cette solution est obtenue pour $\beta > b$, et donc avec la définition 5.8,
- sinon, le minimum est obtenu avec la définition 5.7.

Nous devons alors étudier le signe de $j'(u_b)$ pour $b \in [0, +\infty[$.

Autrement dit, en utilisant l'expression 5.8, il faut dériver en β l'expression

$$\frac{\int_{u_\beta}^b e^{-\beta}(1 - \frac{u}{b}) du}{1 - u_\beta(1 + \frac{1}{b})}$$

en tenant compte du fait que $u_\beta = \frac{1 - (\beta+1)e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}}$. Cette dérivée s'écrit :

$$\frac{-Se^{-\beta}}{2(e^\beta - \beta b - \beta - 1)^2 (e^\beta - 1)^2}$$

avec

$$\begin{aligned}
S = & -5e^\beta + 4e^{-b+3\beta}b\beta - \beta be^{2\beta} - 2\beta be^{4\beta} + 2 + \beta^2 be^{3\beta} + b + \beta + 2\beta^2 e^\beta b - 3\beta^2 be^{2\beta} \\
& + 4\beta be^{3\beta} + \beta b + \beta^3 e^{2\beta} b - 2\beta be^\beta - 5be^\beta + 2\beta e^\beta + 9be^{2\beta} + 3e^{2\beta} \\
& + 2\beta^2 e^\beta + 6e^{-b+2\beta}b - 2e^{-b+\beta}b - 6e^{-b+3\beta}b - 2e^{-b+2\beta}\beta + 2e^{-b+4\beta}b + 6e^{-b+2\beta} + e^{3\beta} \\
& - e^{4\beta} - 2e^{-b+\beta} - 6e^{-b+3\beta} - 2e^{-b+2\beta}b\beta - 2e^{-b+4\beta}b\beta + 2e^{-b+4\beta} - 2e^{-b+4\beta}\beta + 4e^{-b+3\beta}\beta \\
& - 7be^{3\beta} + 4\beta e^{3\beta} - 7\beta e^{2\beta} - 3\beta^2 e^{3\beta} + 2be^{4\beta} + \beta^2 e^{4\beta} + \beta^3 e^{2\beta}
\end{aligned}$$

Ensuite, dans l'expression obtenue, on remplace β par b . Faire les mêmes calculs à partir de la définition 5.7 ne change rien, puisque nous supposons finalement que $\beta = b$.

Numériquement, on trouve facilement une solution de $j'(u_b) = 0$. Il reste à prouver que cette solution est unique. Nous commençons par remarquer que $j'(u_b)$, sur $]0, +\infty[$ est du signe de :

$$\begin{aligned}
& 2b^3 e^{-3b} - 2b^2 e^{-3b} - b^2 - 2b^3 e^{-2b} + b^3 e^{-b} + b^4 e^{-2b} \\
& + 3b^2 e^{-2b} - b^2 e^{-b} + b e^{-3b} + 3e^{-b} - 3e^{-2b} - 3b e^{-b} + b^2 e^{-4b} + e^{-3b} + 2b - 1
\end{aligned}$$

Si $b = 0$, la dérivée n'est pas définie.

On pose $c = e^{-b}$ (ce qui implique que $c \in]0, 1[$), et on résout cette équation en considérant b comme l'inconnue, et c comme un paramètre. On obtient les trois solutions suivantes :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{5 - 4c}}{2c}, \frac{-1 - \sqrt{5 - 4c}}{2c}, 1 - c \right\}$$

Alors, le nombre de solutions de $j'(u_b) = 0$ est le nombre de solutions en \mathcal{S} de :

$$\begin{aligned}
& \exists c \in]0, 1[, \exists S \in \mathcal{S} \\
& \text{tel que} \\
& S = -\log(c)
\end{aligned}$$

Cette égalité est impossible pour la dernière solution, car $-\log(c) > 1 - c$ sur $]0, 1[$. Elle est aussi impossible pour la deuxième solution, car cette solution est négative, alors que $-\log(c) > 0$ sur $]0, 1[$. L'égalité n'est donc possible que pour la première solution, que nous noterons S_1 . Il reste à montrer que cette égalité n'a lieu qu'une fois. Pour cela, il suffit de dériver $S_1 + \log(c)$. Cette dérivée est du même signe que :

$$2c + \sqrt{5 - 4c} - 5 + 2c\sqrt{5 - 4c}$$

On pose alors $d = \sqrt{5 - 4c}$ (ce qui implique $d \in]1, \sqrt{5}[$, et donc $c = \frac{5-d^2}{4}$), et la dérivée a alors le même signe que :

$$d^3 + d^2 - 7d + 5$$

Les racines de ce polynôme sont 1 , $\sqrt{6} - 1$ et $-\sqrt{6} - 1$. Seule la deuxième racine appartient à $]1, \sqrt{5}[$. Donc, la dérivée change de signe une fois sur $]1, \sqrt{5}[$, on peut écrire le tableau de variation suivant :

c	0	$\frac{5 - (\sqrt{6} - 1)^2}{4} = 0,72$	1
$S_1 + \log(c)$	$+\infty$	\searrow -0,012	\nearrow 0

Finalement, l'équation $j'(u_b) = 0$ n'a qu'une seule solution. Nous avons donc une unique valeur limite de b :

$$b_{\text{limite}} \simeq 0,514$$

Le fichier Maple pour calculer b_{limite} se trouve en annexe 9.2.4. Finalement :

- Si $b < b_{\text{limite}}$ le minimum est obtenu avec l'expression $P_m = \int_t^b e^{-\beta}(1 - \frac{u}{b})du$,
- Si $b > b_{\text{limite}}$ le minimum est obtenu pour $P_m = \int_t^\beta e^{-\beta}(1 - \frac{u}{b})du + \int_\beta^b e^{-u}(1 - \frac{u}{b})du$.

Ces équations sont développées en annexe 9.1.1, et le programme de calcul de p_m est en annexe 9.2.5.

Approximation analytique de p_m

Nous avons aussi recherché une approximation analytique de p_m .

Proposition 5.3.14 *la fonction $p_m(p)$ est minorée par :*

$$\begin{cases} 2p^2 e^{-2,5 \frac{p}{1-p}} & \text{si } p < 0,34 \\ 2p^2 e^{-\frac{p}{1-p}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Ces valeurs numériques ont les expressions symboliques suivantes.

- La valeur 0,34 est l'évaluation de $p_{\text{limite}} = \frac{b_{\text{limite}}}{1-b_{\text{limite}}}$.
- La valeur 2,5 est l'évaluation de $\frac{u_\beta^{-1}(b_{\text{limite}})}{b_{\text{limite}}}$.

Preuve : Nous réutilisons l'idée de la proposition 5.3.11. Autrement dit, nous minorons la densité de X , de façon à avoir une expression simple de P_m .

Si $p > p_{\text{limite}}$, nous savons que l'expression de P_m qui va donner le minimum est $P_m = \int_t^\beta e^{-\beta}(1 - \frac{u}{b})du + \int_\beta^b e^{-u}(1 - \frac{u}{b})du$. Donc, pour minorer la densité de X , il suffit de prendre e^{-b} .

Sinon, il faut minorer e^{-u_β} . Or, $u_\beta < b$. Il suffit donc de majorer $u_\beta^{-1}(b)$. Comme u_β est une fonction concave croissante, sa réciproque est convexe croissante. On peut donc la majorer par la corde entre deux points. Si ces deux points sont ceux d'abscisses 0 et b_{limite} , nous obtenons :

$$u_\beta^{-1}(b) \leq b \times \frac{u_\beta^{-1}(b_{\text{limite}})}{b_{\text{limite}}}$$

Cette approximation est simple, mais peu précise. En effet, elle est décroissante à partir de $\frac{1}{2}$, où elle vaut 0,18, alors que p_m y vaut 0,31. De plus, elle tend vers 0 quand b tend vers 1. ♣

Récapitulatif des résultats concernant p_m

Pour un calcul de p_m , on pourra utiliser :

- la table fournie en annexe 9.1.2 et la propriété 5.3.13, qui permet de contrôler les variations de p_m entre deux valeurs de la table,
- pour de petites valeurs de p (inférieures à 1%), il vaudra mieux utiliser l'équivalent défini par la proposition 5.3.11,
- pour un calcul exact, le programme Maple fourni en annexe 9.2.5,
- pour un calcul rapide, la fonction spline située au début du programme en annexe 9.2.2 (la fonction spline a été définie à partir de la table des valeurs).

5.3.4 Représentation graphique

Les fonctions $\log \frac{p_M(p)}{p}$ et $\log \frac{p_m(p)}{p}$ sont représentées sur la figure 5.5.

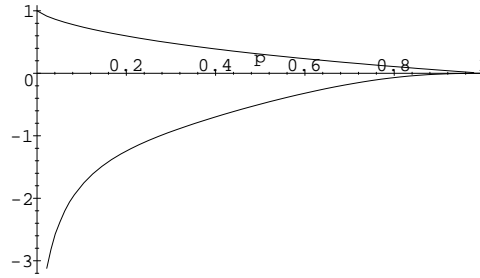


FIG. 5.5 – Logarithmes des fonctions permettant d’encadrer $\mathbb{P}(\mathcal{C}_n)$ sous hypothèse HNBUE

5.4 Utilisation pour un calcul de séquence

5.4.1 Résultats

Maintenant que nous avons simplifié $\mathbb{P}(t < X < Y)$, nous pouvons utiliser ce résultat pour simplifier le calcul de la probabilité d’une séquence fixée avec un nombre quelconque de variables, par récurrence.

Théorème 5.4.1 *Soit une famille de variables aléatoires R_i de loi F_i , HNBUE de moyenne r_i . On a :*

$$\mathbb{P}(\tilde{R}_0 > \cdots > \tilde{R}_{n-1}) \leq \prod_{i=1}^{n-1} p_M \left(\frac{\frac{1}{r_i}}{\sum_{j \leq i} \frac{1}{r_j}} \right)$$

où p_M est défini par $\log p_M(p) = 1 + \frac{\log p}{1-p}$.

Preuve : Le raisonnement se fait par récurrence.

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\tilde{R}_0 > \cdots > \tilde{R}_3 > \cdots > \tilde{R}_{n-1}\right) \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(\tilde{R}_0 > \tilde{R}_1 > u > \tilde{R}_3 > \cdots > \tilde{R}_{n-1}\right) dF_2(u) \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(\tilde{R}_0 > \tilde{R}_1 > u\right) \times \mathbb{P}\left(u > \tilde{R}_3 > \cdots > \tilde{R}_{n-1}\right) dF_2(u) \quad (5.11)$$

$$\leq p_M \left(\frac{r_0}{r_0 + r_1}\right) \times \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(\mathcal{E}_{\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1}} > u\right) \times \mathbb{P}\left(u > \tilde{R}_3 > \cdots > \tilde{R}_{n-1}\right) dF_2(u) \quad (5.12)$$

$$= p_M \left(\frac{\frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1}}\right) \times \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(\mathcal{E}_{\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1}} > u > \tilde{R}_3 > \cdots > \tilde{R}_{n-1}\right) dF_2(u) \quad (5.13)$$

$$= p_M \left(\frac{\frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1}}\right) \times \mathbb{P}\left(\mathcal{E}_{\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1}} > \tilde{R}_2 > \tilde{R}_3 > \cdots > \tilde{R}_{n-1}\right) \quad (5.14)$$

Remarquons que le passage à l'équation 5.11 demande l'indépendance des différentes variables. ♣

Remarque : Il serait bien sûr possible de faire le même calcul avec n'importe lequel des majorants du théorème 5.3.1. Ce majorant-là présente surtout l'avantage d'être simple à utiliser, puisqu'il nous permet de nous situer par rapport au modèle markovien, lui aussi simple d'utilisation.

Nous proposons de faire le même type de simplification pour la minoration.

Théorème 5.4.2 *Soit une famille de variables aléatoires R_i de loi F_i , HNBUE de moyenne r_i , et \mathcal{E}_Λ une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre Λ . On a :*

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{E}_\Lambda > \tilde{R}_0 > \cdots > \tilde{R}_{n-1}\right) \geq \prod_{i=0}^{n-1} p_m \left(\frac{\frac{1}{r_i}}{\Lambda + \sum_{j \leq i} \frac{1}{r_j}}\right)$$

où p_m est le meilleur minorant p_m tel que :

$$\forall X \in \mathcal{H}_a, \forall Y \in \mathcal{H}_b, \forall t \in \mathbb{R}^+, \mathbb{P}(t < X < Y) \geq p_m \times \left(1 - t \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right)$$

Pour une utilisation pratique de ce théorème, on se reportera au 5.3.3.

Nous sommes maintenant en mesure de résumer l'ensemble de ce qui précède pour fournir une solution au problème de départ.

Corollaire 5.4.3 *On note :*

- V_i le temps de bon fonctionnement du composant i , c'est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ_i ;
- R_i le temps de réparation du composant i , c'est une variable aléatoire de loi F_i , HNBUE de moyenne r_i .

La séquence \mathcal{C}_n est définie par :

$$\mathcal{C}_n = \left\{ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=i}^n V_j < R_{i-1} \right\}$$

Alors, la probabilité de la séquence \mathcal{C}_n est encadrée par :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathcal{C}_n) &\leq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i r_{i-1} \right) \prod_{i=1}^{n-1} p_M \left(\frac{\frac{1}{r_i}}{\sum_{j \leq i} \frac{1}{r_j}} \right) \\ \mathbb{P}(\mathcal{C}_n) &\geq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i r_{i-1} \right) \prod_{i=0}^{n-1} p_m \left(\frac{\frac{1}{r_i}}{\Lambda + \sum_{j \leq i} \frac{1}{r_j}} \right)\end{aligned}$$

où p_M est défini par $\log p_M(p) = 1 + \frac{\log p}{1-p}$, et p_m est le meilleur minorant p_m tel que :

$$\forall X \in \mathcal{H}_a, \forall Y \in \mathcal{H}_b, \forall t \in \mathbb{R}^+, \mathbb{P}(t < X < Y) \geq p_m \times \left(1 - t \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right)$$

Pour un calcul pratique de p_m , on se reportera au 5.3.3.

Avec ce résultat, le corollaire 5.1.3 permet d'obtenir un majorant le cas de séquences comprenant certains composants irréparables. En revanche, le minorant obtenu est d'intérêt et de valeur nul.

Corollaire 5.4.4 *On reprend les hypothèses et notations du corollaire 5.4.3. Soit de plus $I \subset \{1, \dots, n\}$ un ensemble de composants irréparables, ne comprenant pas le composant 1. Alors, la probabilité de la séquence \mathcal{C}_n est majorée par :*

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_n) \leq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right) \left(\prod_{i=0, i \notin I}^{n-1} r_i \right) \prod_{i=1, i \notin I}^{n-1} p_M \left(\frac{\frac{1}{r_i}}{\sum_{j \leq i, j \notin I} \frac{1}{r_j}} \right) \prod_{i=1, i \in I}^{n-1} \left(\frac{e}{\sum_{j \leq i, j \notin I} \frac{1}{r_j}} \right)$$

Preuve : Supposons que $\forall i \in I, r_i > A$. Alors :

$$\sum_{j \leq i, j \notin I} \frac{1}{r_j} < \sum_{j \leq i} \frac{1}{r_j} < \sum_{j \leq i, j \notin I} \frac{1}{r_j} + \frac{n}{A}$$

Alors, pour $i \in I$:

$$p_M \left(\frac{\frac{1}{r_i}}{\sum_{j \leq i} \frac{1}{r_j}} \right) \underset{A \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{r_i} \times \frac{e}{\sum_{j \leq i, j \notin I} \frac{1}{r_j}}$$

Donc :

$$r_i p_M \left(\frac{\frac{1}{r_i}}{\sum_{j \leq i} \frac{1}{r_j}} \right) \underset{A \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{e}{\sum_{j \leq i, j \notin I} \frac{1}{r_j}}$$

Par ailleurs, pour $i \notin I$:

$$p_M \left(\frac{\frac{1}{r_i}}{\sum_{j \leq i} \frac{1}{r_j}} \right) \underset{A \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} p_M \left(\frac{\frac{1}{r_i}}{\sum_{j \leq i, j \notin I} \frac{1}{r_j}} \right)$$

♣

Ces résultats peuvent aussi être utilisés pour un calcul de disponibilité. Dans ce cas, il est nécessaire de connaître le temps de séjour dans un état dégradé, le système venant d'un état donné. Dans le cas d'une séquence donnée, ce calcul est possible.

Corollaire 5.4.5 *On reprend les hypothèses et notations du corollaire 5.4.3. En notant T le temps de séjour dans l'état auquel on arrive après la défaillance du composant n , après y être arrivé par la séquence \mathcal{C}_n , on a :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &\leq r_n \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i r_{i-1} \right) \prod_{i=1}^n p_M \left(\frac{\frac{1}{r_i}}{\sum_{j \leq i} \frac{1}{r_j}} \right) \\ \mathbb{E}(T) &\geq r_n \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i r_{i-1} \right) \prod_{i=0}^n p_m \left(\frac{\frac{1}{r_i}}{\Lambda' + \sum_{j \leq i} \frac{1}{r_j}} \right)\end{aligned}$$

où $\Lambda' = \max_{i=0, \dots, n+1} \lambda_i$.

Preuve : Il nous faut d'abord exprimer T en fonction des variables aléatoires définissant les séquences. On a :

$$T = \min_{i=0, \dots, n} \left(R_i - \sum_{j=i+1}^n V_j \right) \wedge V_{i+1}$$

Supposons qu'il existe, dans l'état auquel on arrive après la défaillance du composant n , une défaillance supplémentaire, se produisant après le temps V , de taux λ . Définissons \mathcal{C}'_{n+1} par :

$$\mathcal{C}'_{n+1} = \left\{ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=i}^n V_j < R_{i-1} \right\} \cap \left\{ \sum_{j=i}^n V_j + (V_{n+1} \wedge V) < R_n \right\}$$

Nous calculerons de deux manières la probabilité de l'évènement :

$$\mathcal{C}'_{n+1} \cap \{V_{n+1} > V\}$$

En manipulant les inégalités définissant ces évènements, il vient :

$$\mathcal{C}'_{n+1} \cap \{V_{n+1} > V\} \Leftrightarrow T > V$$

Or :


$$\mathbb{P}(T > V \mid T = t) = 1 - e^{-\lambda t} \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \lambda t$$

De plus, T est intégrable, car inférieure entre autres à R_0 . Donc, en utilisant le théorème de convergence dominée :

$$\frac{\mathbb{P}(T > V)}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \mathbb{E}(T)$$

Par ailleurs :

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}'_{n+1} \cap \{V_{n+1} > V\}) = \mathbb{P}(\mathcal{C}'_{n+1}) \times \frac{\lambda}{\lambda_{n+1} + \lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \mathbb{P}(\mathcal{C}'_{n+1}) \times \frac{\lambda}{\lambda_{n+1}}$$

Il suffit ensuite de remplacer $\mathbb{P}(\mathcal{C}'_{n+1})$ par ses majorant et minorant pour obtenir le résultat. 

Corollaire 5.4.6 *On reprend les hypothèses et notations du corollaire 5.4.3. Soit de plus $I \subset \{1, \dots, n\}$ un ensemble de composants irréparables. En notant T le temps de séjour dans le dernier état de la séquence, sachant qu'on y est arrivé par cette séquence :*

$$\mathbb{E}(T) \leq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right) \left(\prod_{i=0, i \notin I}^n r_i \right) \prod_{i=1}^n p_M \left(\frac{\frac{1}{r_i}}{\sum_{j \leq i, j \notin I} \frac{1}{r_j}} \right) \prod_{i=1, i \in I}^n \left(\frac{e}{\sum_{j \leq i, j \notin I} \frac{1}{r_j}} \right)$$

On peut enfin, en remarquant que $p_M(p) < ep$, donner une version simplifiée de ces quatre corollaires :

Corollaire 5.4.7 *Pour la probabilité d'une séquence ainsi que pour le temps moyen de séjour dans le dernier état de la séquence, le rapport entre le résultat obtenu dans le cas markovien et celui obtenu dans le pire des cas est majoré par e^{n-1} , où n est le nombre de défaillances de la séquence.*

5.4.2 Application

Premier exemple Dans le cas du premier exemple défini au paragraphe 5.1.1, l'application du corollaire 5.4.3 donne :

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_n) \leq (\lambda r)^n \times \prod_{i=1}^n p_M \left(\frac{1}{i} \right)$$

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_n) \geq (\lambda r)^n \times \prod_{i=1}^n p_m \left(\frac{1}{i + \lambda r} \right) \simeq (\lambda r)^n \times \prod_{i=1}^n p_m \left(\frac{1}{i} \right)$$

De manière à placer le cas markovien par rapport aux deux bornes, on calcule les deux rapports suivants : le majorant divisé par la probabilité obtenue dans le cas markovien, et la probabilité obtenue dans le cas markovien divisée par le minorant.

n	2	3	5	7	11	$n > 11$
maj/Markov	2e0	3e0	8e0	3e1	6e2	$1 \cdot 10^{-2} \times e^n$
Markov	4e-3	1e-4	7e-7	2e-10	2e-18	$10^{-n}/n!$
Markov/min	2e0	4e0	4e1	8e2	9e5	$5 \cdot 10^1 \times 2^{-n}n!$

Les calculs nécessaires pour traiter cet exemple étant fastidieux, ils ont été réalisés à l'aide du programme Maple en annexe 9.2.2.

Pour les grandes valeurs de n , il faut utiliser le fait que $p_m \sim 2p^2$, et $p_M \sim ep$ en 0. Néanmoins, il est clair que ces expressions sont des approximations, et non des équivalents : pour obtenir des équivalents, il faudrait aller un pas plus loin dans les développements limités de p_m et p_M .

Remarque : On peut noter, que, les temps moyens de réparation étant tous égaux, **et en supposant que $\lambda r \ll 1$** , la symétrie permet de mener les calculs dans des cas autres que le cas markovien, et donc de rechercher des cas réels pour lesquels la probabilité de la séquence est plus grande ou plus petite que dans le cas markovien.

Pour obtenir une probabilité plus grande que dans le cas markovien, on suppose que les m premières réparations sont de loi exponentielle, et les $n - m$ dernières de loi de Dirac, ce qui correspond aux cas extrêmes pour

la pseudo-variable. Alors, la probabilité de la séquence est de l'ordre de :

$$\begin{aligned}
 (\lambda r)^n \times \mathbb{P}(\mathcal{E}_0 > \dots > \mathcal{E}_m > \mathcal{U}_{m+1} > \dots > \mathcal{U}_n) \\
 &= \frac{(\lambda r)^n}{m!(n-m)!} \times \mathbb{P}\left(\min_{i=1, \dots, m} \mathcal{E}_i > \max_{i=m+1, \dots, n} \mathcal{U}_i\right) \\
 &= \frac{(\lambda r)^n}{m!(n-m)!} \times \int_0^{+\infty} m e^{-mu} (u \wedge 1)^{n-m} du \\
 &= \frac{(\lambda r)^n}{m! m^{n-m}} \times \left[1 - e^{-m} \sum_{k=0}^{n-m} \frac{m^k}{k!} + e^{-m} \frac{m^{n-m}}{(n-m)!} \right] \\
 &= \frac{(\lambda r)^n}{m! m^{n-m}} \times \left[1 - e^{-m} \sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{m^k}{k!} \right]
 \end{aligned}$$

Il reste à maximiser cette probabilité en m , ce qui peut être fait numériquement. Pour obtenir une probabilité plus petite que le cas markovien, la démarche est la même, mais les calculs analytiques plus difficiles. On obtient finalement les résultats suivants :

n	2	3	5	7	11
maj/Markov	1e0	2e0	3e0	5e0	1e1
Markov/min	1e0	2e0	5e0	1e1	6e1

On peut aussi étudier le comportement asymptotique de ces exemples, et en particulier du majorant. L'étude numérique permet de constater que le maximum de la probabilité est atteint pour un rapport $\frac{n}{m}$ semblant tendre vers 3,7.

Pour simplifier notre étude, nous nous restreindrons donc au cas $n > 2m$, ce qui est équivalent à $n - m > m$. Alors, nous savons que :

$$1 - e^{-m} \sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{m^k}{k!} \lesssim e^{-m} \frac{m^{n-m}}{(n-m)!}$$

Pour rechercher le maximum de la probabilité, il suffit donc de maximiser $\frac{e^{-m}}{m!(n-m)!}$. En calculant le rapport de deux termes successifs, on montre que le maximum est obtenu pour $m \simeq \frac{n}{e+1}$. Alors, en utilisant la formule de Stirling, on constate que le rapport entre la probabilité maximale et le cas markovien est au moins égal à :

$$\frac{e+1}{\sqrt{2\pi e}} \frac{\left(1 + \frac{1}{e}\right)^n}{\sqrt{n}}$$

Second exemple Dans le cas du second exemple défini au paragraphe 5.1.1, l'application du corollaire 5.4.4 donne :

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_n) \leq (\lambda r)^{2n} \times \left(\frac{e}{n}\right)^n \times \prod_{i=1}^n p_M\left(\frac{1}{i}\right)$$

Là aussi on divise le majorant par la probabilité obtenue dans le cas markovien.

n	2	3	5	7	$n > 7$
maj/Markov	1e1	6e1	1e3	4e4	$3 \cdot 10^{-2} \times e^{2n}$
Markov	1e-5	5e-9	2e-16	2e-23	$10^{-2n}/(n^n n!)$

5.5 Voies alternatives, perspectives

Au lieu d'encadrer la fonction $\mathbb{P}(t < X < Y)$, nous aurions pu encadrer $\mathbb{P}(X < Y < t)$. Le problème, c'est que cette fonction, **même dans le cas markovien**, n'a pas une expression facile à manipuler. De plus $\mathbb{P}(X < Y < Z < t)$ a une expression encore plus compliquée, et ainsi

de suite quand le nombre de variables augmente. Il vaut donc mieux étudier $\mathbb{P}(t < X < Y)$. Nous aurions pu aussi chercher à obtenir des encadrements plus étroits sous des hypothèses plus restrictives que l'hypothèse HNBUE (par exemple NBUE). Cela semble difficile, surtout pour le majorant. En effet, on constate que les fonctions de \mathcal{F}_a^+ servant au calcul de ce majorant sont les fonctions de répartition de pseudo-variables dont les variables sont DMRL.

Or, c'est avec ces fonctions F_α que l'on atteint la borne $e^{-\alpha(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})} \frac{e^{-\frac{d}{b}} - e^{-\frac{a}{b}}}{\frac{a}{b}}$ (avec $d = t - \alpha$) que l'on majore ensuite par un majorant plus agréable de la forme ke^{-lt} . De plus, cette seconde majoration est relativement précise, puisqu'il existe toujours un t pour lequel elle devient une égalité. Améliorer ces encadrements sous des hypothèses plus restrictives nécessiterait donc une approche entièrement différente.

L'étude des composants irréparables pourrait sans doute être améliorée. D'abord, il n'est pas certain que la nullité du minorant soit une fatalité. Ensuite, il est peut-être possible d'améliorer le majorant. Si l'on revient aux équations définissant la probabilité de l'évènement étudié, on constate que la présence de k composants irréparables dans une séquence amène à devoir encadrer l'intégrale suivante :

$$\int_t^{+\infty} f_X(u) \frac{u^k}{k!} \bar{F}_Y(u) du$$

Contrairement à ce qui se passait dans les intégrales que nous avons encadrées par une exponentielle ou une fonction affine, le terme $\frac{u^k}{k!} \bar{F}_Y(u)$ n'est pas monotone. Nous pouvions, pour encadrer l'intégrale, prendre une fonction $f_X(u)$ extrémale dans son comportement après t . Ici, il faudrait une fonction maximale (par exemple) entre t et le changement de pente de $\frac{u^k}{k!} \bar{F}_Y(u)$, et minimale après. Il faudrait donc utiliser des familles de fonctions $f_X(u)$ plus larges que les familles \mathcal{F}_a^\pm . Cette étude semble relativement difficile.

Chapitre 6

Utilisation pour des calculs pratiques de fiabilité et disponibilité

Dans le chapitre précédent, nous avons démontré des encadrements, à partir d'hypothèses portant sur les séquences menant à la panne, et leur déroulement. Pour pouvoir utiliser ces encadrements, il nous faut d'abord transformer ces hypothèses en des hypothèses portant sur les composants du système, les événements les affectant, et les interactions entre ces événements. Or, pour écrire ces hypothèses sans ambiguïté, nous avons besoin d'un cadre théorique précis. Nous commençons donc par décrire ce cadre théorique, en nous appuyant sur les Processus Semi-Markoviens Généralisés, définis entre autres dans [22]. Ceci fait, l'hypothèse 6.1.2 et surtout l'hypothèse 6.1.3 s'écrivent facilement.

Il reste à montrer que les probabilités que nous avons encadrées permettent de calculer la fiabilité et la disponibilité. Sous les hypothèses précédentes, et en supposant que les réparations sont beaucoup plus rapides que les défaillances, le système comporte deux types d'états : les états «lents», qui sont les états dans lesquels aucune réparation n'est en cours, et les autres états, nommés «rapides».

Or, on constate que, si l'on étudie le système sur des temps légèrement supérieurs aux temps moyens de réparation, ce qui se passe dans les états rapides peut être résumé, pour les calculs de fiabilité et disponibilité, à :

- des probabilités de passage d'un état lent à un autre,
- à des temps moyens de séjour dans des états rapides.

C'est ce que l'on nomme «approximation lent-rapide», définie en 6.2.2 (qui se ramène à l'approximation exponentielle dans le cas d'un calcul de fiabilité sur un système dont tous les composants sont réparables).

C'est maintenant que nous pouvons utiliser les résultats du chapitre précédent. En effet, les probabilités de passage et les temps moyens de séjour dépendent surtout des séquences que nous avons étudiées : les séquences monotones, sans aucune réparation réussie.

Par ailleurs, ce qui se passe dans les états lents n'est pas directement influencé par les réparations : l'incertitude sur ces réparations n'y a donc pas d'influence directe. De plus, si toutes les défaillances sont de loi exponentielle, les états lents sont régénératifs, ce qui simplifie considérablement l'étude.

Finalement, par le biais de cette approximation, nous nous sommes ramenés à un processus markovien, dans lequel l'incertitude sur les temps de réparation n'influence que quelques taux de transition. De plus, nous savons mesurer cette influence.

6.1 Modèle

6.1.1 Définition du processus étudié

On définit ce processus par le sextuplet $(S, A, \mathcal{E}, p, \mathcal{P}_\alpha, r)$, avec les définitions suivantes.

- S est l'ensemble des états «physiques» du système, supposé au plus dénombrable. On note S_t l'état physique du système à la date t .
- A est l'ensemble des événements possibles, supposé fini, de cardinal m .
- \mathcal{E} décrit les conditions de validité des différents événements : c'est une application de S dans l'ensemble des parties de A , $\mathcal{E}(s)$ est l'ensemble des événements valides à partir de l'état s . Sans perte de généralité, on suppose que $A = \bigcup_{s \in S} \mathcal{E}(s)$.
- p décrit les probabilités de passage d'un état à un autre, sachant qu'un événement donné s'est réalisé : pour $s \in S$ et $\alpha \in \mathcal{E}(s)$, $p(\cdot, s, \alpha)$ est une distribution de probabilité sur S ,

- et $p(s', s, \alpha)$ est la probabilité de passer de s à s' , sachant α réalisé.
- \mathcal{P}_α décrit les initialisations des «minuteriers», c'est à dire le temps avant déclenchement de chaque évènement. Pour chaque α , nous supposons donnée une suite $X = (X_\alpha(n))_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires i.i.d., de support $]0, \infty]$, de loi \mathcal{P}_α . De plus, tous les $X = (X_\alpha(n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont indépendants les uns des autres, ainsi que de l'évolution du processus. Au $n^{\text{ième}}$ démarrage de la minuterie α , son temps avant déclenchement est fixé à $X_\alpha(n)$.
 - r décrit la vitesse des minuteriers : c'est une application de $S \times A$ dans \mathbb{R}^+ . Si $\alpha \in \mathcal{E}(s)$, la minuterie de l'évènement α avance à la vitesse $r_{s,\alpha}$.

À partir de ces définitions, il est possible de décrire la vie du processus. Notons τ_n la date de la $n^{\text{ième}}$ transition, s_n l'état dans lequel le système entre lors de la $n^{\text{ième}}$ transition, et $c_n = (c_n(\alpha))_{\alpha \in A}$ le vecteur des durées résiduelles des minuteriers juste après la $n^{\text{ième}}$ transition. Au départ, s_0 est fixé, $\tau_0 = 0$, et les durées des minuteriers sont fixées à $X_\alpha(1)$ si $\alpha \in \mathcal{E}(s_0)$, et 0 sinon.

Supposons que (τ_n, s_n, c_n) a été déterminé. Alors :

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \min_{\alpha \in \mathcal{E}(s_n)} \left\{ \frac{c_n(\alpha)}{r_{s_n, \alpha}} \right\}$$

avec la convention qu'une division par 0 donne $+\infty$. L'évènement α_{n+1}^* qui réalise le minimum déclenche la $n+1^{\text{ième}}$ transition, on dit qu'il «a lieu» (si plus d'un α réalise le minimum, il faut les départager, par exemple en ordonnant les α , ce qui est possible puisqu'ils sont en nombre fini). L'état suivant est choisi suivant la loi $p(\cdot, s_n, \alpha_{n+1}^*)$. Après la transition, les minuteriers sont mises à jour comme suit. Soit n_α le nombre de fois où la minuterie α a été démarrée, juste avant la $n^{\text{ième}}$ transition.

- Si $\alpha \in \mathcal{E}(s_{n+1})$,
 - si $\alpha \in \mathcal{E}(s_n) - \{\alpha_{n+1}^*\}$, alors $c_{n+1}(\alpha) = c_n(\alpha) - r_{s_n, \alpha}(\tau_{n+1} - \tau_n)$, on met simplement à jour la minuterie,
 - sinon, $c_{n+1}(\alpha) = X_\alpha(n_\alpha + 1)$, on dit que le démarrage de la minuterie α est déclenché par α_{n+1}^* ,
- sinon, $c_{n+1}(\alpha) = 0$.

L'état du processus est maintenant connu : $\forall t \in [\tau_n, \tau_{n+1}[$, $S_t = s_n$.

Remarque : Ce cadre comprend de nombreux systèmes étudiés en fiabilité, par exemple ceux étudiés dans [9, 32, 14, 38, 6]. Il comprend aussi de nombreuses files d'attente, en particulier les files GI/GI/m/n.

6.1.2 Hypothèses spécifiques

Dorénavant, le processus étudié est du type défini ci-dessus.

Notation 6.1.1 L'ensemble des défaillances est noté \mathcal{V} , celui des réparations \mathcal{R} .

Hypothèse 6.1.2 Tous les évènements sont soit des défaillances soit des réparations : $A = \mathcal{V} \cup \mathcal{R}$.

Les défaillances sont exponentielles et les réparations HNBUE : si $\alpha \in \mathcal{V}$, la variable X_α suit une loi exponentielle, et une loi HNBUE sinon.

Hypothèse 6.1.3 Une défaillance supplémentaire n'invalide et ne modifie la vitesse d'aucune

réparation en cours :

$$\forall s \in S, \forall \alpha \in \mathcal{E}(s) \cap \mathcal{V}, p(s', s, \alpha) > 0 \Rightarrow \forall \beta \in \mathcal{R} \begin{cases} \beta \in \mathcal{E}(s) \Rightarrow \beta \in \mathcal{E}(s') \\ r_{s,\beta} = r_{s',\beta} \end{cases}$$

De plus, si plusieurs réparations deviennent valides à la suite d'une défaillance, leur minimum suit une loi HNBUE.

Notation 6.1.4 L'ensemble des états du graphe peut être divisé en deux : les états dans lesquels aucune réparation n'est en cours, et les autres. Comme les défaillances sont censées être beaucoup plus lentes que les réparations, on peut considérer les états sans réparation en cours comme lents, et les autres comme rapides. Autrement dit :

$$L = \{s \in S \mid \mathcal{E}(s) \subset \mathcal{V}\}$$

$$D = S - L$$

6.2 Approximation lent-rapide

L'approximation lent-rapide a été introduite dans [7, 39]. Elle est beaucoup utilisée pour simplifier le traitement de grands modèles markoviens. Ici, nous l'utiliserons pour simplifier l'étude du processus. En effet, on a la propriété suivante.

Proposition 6.2.1 Un état de L est régénératif.

Preuve : Les variables aléatoires X_α sont globalement indépendantes. Donc, si $\alpha \in \mathcal{V}$ et $\alpha' \neq \alpha$, pour toute fonction f de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \mathbb{P}(X_\alpha - f(X_{\alpha'}) > t \mid X_\alpha > f(X_{\alpha'})) = \mathbb{P}(X_\alpha > t)$$

car la variable X_α suit une loi exponentielle. Donc, pour tout n :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall \alpha \in \mathcal{E}(s_{n+1}) \mathbb{P}(c_{n+1}(\alpha) > t) = \mathbb{P}\left(\frac{X_\alpha}{r_{s_{n+1},\alpha}} > t\right)$$

Le temps résiduel sur la minuterie α est indépendant de l'état du système avant τ_n . De plus, le même raisonnement peut être fait pour tout p uplet de variables de \mathcal{V} : les temps résiduels sont globalement indépendants. ♣

Pour construire et valider cette approximation, il est nécessaire que le temps de séjour dans les états rapides (ou dégradés) soit presque sûrement fini. Sinon, il est facile de construire des exemples dans lesquels l'approximation lent-rapide est impossible à construire.

Hypothèse 6.2.2 La durée d'un séjour dans l'ensemble des états rapides est presque sûrement finie.

6.2.1 Construction d'un processus réduit

Nous voulons construire un processus réduit au passage dans les états lents, qui sont régénératifs. Notons i_1, i_2, \dots les dates d'entrées dans le sous-ensemble L , et o_0, o_1, \dots les dates de sortie de L , si elles sont finies. Il faut distinguer deux cas, selon la valeur de S en 0. Si $S_0 \in L$:

$$o_0 = i_1 = 0$$

$$o_1 = \inf \{t \geq i_1 \mid S_t \notin L\}$$

$$i_2 = \inf \{t \geq o_1 \mid S_t \in L\}$$

$$\dots$$

Sinon :

$$\begin{aligned}
 o_0 &= 0 \\
 i_1 &= \inf \{t \geq o_0 \mid S_t \in L\} \\
 o_1 &= \inf \{t \geq i_1 \mid S_t \notin L\} \\
 i_2 &= \inf \{t \geq o_1 \mid S_t \in L\} \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Il se peut que, pour une valeur de k , la date o_k soit égale à $+\infty$. On ne définit alors pas les dates ultérieures, à savoir o_i et i_i pour $i > k$. En revanche, si une sortie est à une date finie, l'entrée suivante est aussi à date finie, par hypothèse.

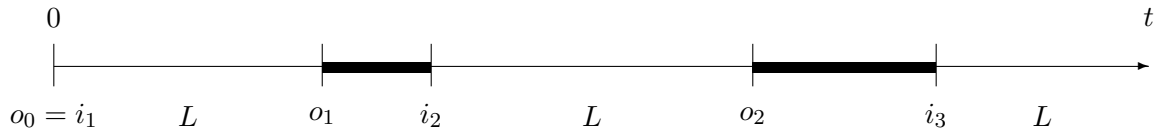


FIG. 6.1 – Excursions hors de L , si $S_0 \in L$

Nous considérons, de plus, les durées des excursions hors de L , notées δ_i ($i \geq 0$) :

$$\delta_i = i_i - o_{i-1}$$

Notation 6.2.3 *Étant donnés ces éléments, nous définissons le processus de sauts suivant, noté \tilde{S} , par :*

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}_t &= S_{t+\delta_1} && \text{pour } i_1 \leq t < o_1, \\
 \tilde{S}_t &= S_{t+\delta_1+\delta_2} && \text{pour } i_2 \leq t < o_2, \\
 \tilde{S}_t &= S_{t+\delta_1+\delta_2+\delta_3} && \text{pour } i_3 \leq t < o_3, \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

C'est ce processus que nous appellerons processus réduit. Les durées δ_i étant presque sûrement finies, la notation (6.2.3) définit bien un processus à valeurs dans le sous-ensemble L . Le processus réduit \tilde{S} parcourt successivement les états lents visités par S . Il est donc utile, pour caractériser \tilde{S} , d'étudier la suite des états lents visités par S . Cette suite est infinie lorsque le processus ne visite pas d'état absorbant. Dans le cas contraire, on peut la «compléter» (de même que dans la construction de la chaîne encastrée d'un processus markovien homogène) de manière à la rendre infinie.

6.2.2 Approximation

Les états de L sont régénératifs, le processus \tilde{S} est donc une chaîne de Markov. En effet, pour tout $(i, j) \in L^2$, la probabilité que le prochain état lent visité par \tilde{S} soit j , sachant que $S_t = i$, ne dépend pas de la date t .

On note :

- $a_{i,j}$ (resp. $\tilde{a}_{i,j}$) : le taux de transition de i vers j , avec $i \in L$ et $j \in S$, pour le processus S (resp. \tilde{S}),

- $p_i(t)$ (resp. $\tilde{p}_i(t)$) : la probabilité de présence en i à t , avec $i \in L$, pour le processus S (resp. \tilde{S}),
- $q_{i,j}$: la probabilité, pour le processus S , d'aller de i à j en passant par les états de R , avec $(i, j) \in L^2$,
- $\tau_{i,j}$: le temps moyen, pour le processus S , de séjour dans l'état j partant de i , avant sortie de R , avec $(i, j) \in L \times R$.

On a alors :

$$\tilde{a}_{i,j} = a_{i,j} + q_{i,j} \times \sum_{k \in R} a_{i,k}$$

Ceci permet de calculer les probabilités de présence dans les états lents, en résolvant l'équation différentielle définissant ces probabilités, puis celles dans les états rapides, par l'équation suivante :

$$\tilde{p}_i(t) = \sum_{k \in L} \frac{\tilde{p}_k(t) \tau_{k,i}}{\sum_{l \in L} \tilde{a}_{i,l}}$$

6.2.3 Réduction aux séquences sans réparation réussie

Les probabilités $q_{i,j}$ et les temps $\tau_{i,j}$ peuvent être calculés à l'aide d'une représentation matricielle, ou bien à l'aide d'une énumération de séquences (cf. [39]). Parmi ces séquences, on constate dans la plupart des cas que les séquences ne comprenant aucune réparation réussie sont prépondérantes.

Proposition 6.2.4 *Dans le cas d'un processus du type défini au paragraphe 6.1.1, sous les hypothèses 6.1.2 et 6.1.3 on peut utiliser, pour le calcul des probabilités des séquences ne comprenant aucune réparation réussie, les corollaires 5.4.3 et 5.4.4. De plus, on peut utiliser les corollaires 5.4.5 et 5.4.6 pour les temps moyens.*

Preuve : L'hypothèse 6.1.2 nous assure que le système ne comprend que des défaillances ou des réparations. Par ailleurs l'hypothèse 6.1.3 nous assure qu'à chaque défaillance supplémentaire, les réparations en cours ne sont pas affectées.

Si le nombre de réparations qui deviennent valides est nul, on applique le corollaire 5.4.4. Sinon, il suffit de remarquer que le temps à prendre en compte dans le calcul de probabilité de séquence est en fait le minimum des temps de réparations qui deviennent valides, dont nous savons qu'il est HNBUE : on applique alors le corollaire 5.4.3. ♣

6.3 Validation des approximations

Nous proposons en fait deux approximations : négliger le temps passé dans les états rapides, et négliger la probabilité des séquences comprenant des réparations réussies.

La première approximation a été largement étudiée, et de nombreuses bornes de l'erreur d'approximation existent [47, 21, 8, 10, 39]. La plupart de ces études supposent un ensemble d'états lents réduit à l'état de marche parfaite et l'état de panne, sauf la dernière qui nécessite en contrepartie la connaissance de la transformée de Laplace du temps de séjour dans les états rapides (et non seulement sa moyenne), et est par ailleurs moins précise dans le cas où les précédentes s'appliquent.

La seconde a été moins étudiée, on peut citer [47, 9]. La première étude fournit un résultat asymptotique : la contribution des séquences avec des réparations réussies tend vers 0 quand les taux de défaillance tendent vers 0. La seconde suppose les composants indépendants.

Nous avons donc deux problèmes : estimer le temps de séjour dans les états rapides (en moyenne, transformée de Laplace ou autre), majorer la probabilité des séquences comprenant des réparations réussies.

6.3.1 Un exemple de problème posé par les lois HNBUE

Dans [39], on construit la majoration du temps de séjour dans les états rapides à partir d'hypothèses sur :

- la durée moyenne de chacune des réparations (elle est inférieure à une valeur donnée) et des défaillances (supérieure à une valeur donnée)
- la structure de l'ensemble des états rapides (les réparations vont toutes dans le même sens, et le chemin à parcourir dans ce sens pour sortir de l'ensemble des états rapides est borné).

Hélas, reproduire cette démarche dans notre cas est difficile. Il est certes possible de transposer les hypothèses sur la structure de l'ensemble des états rapides. En revanche, il est difficile de transposer celle sur la durée moyenne des réparations, parce que, dans certains cas, c'est la durée résiduelle de réparation qui importera. Or, dans le cas d'une variable suivant une loi HNBUE, **il n'y a pas de borne sur la variable résiduelle**, comme nous le montrons avec le contre exemple suivant.

Exemple Soit la variable de moyenne a , de loi définie par les équations suivantes, :

$$\begin{aligned}\bar{F}(u) &= 1 && \text{si } u \in [0, u_\beta[\\ \bar{F}(u) &= e^{-\frac{\beta}{a}} && \text{si } u \in [u_\beta, \beta[\\ \bar{F}(u) &= e^{-\frac{u}{a}} && \text{si } u \in [\beta, +\infty[\end{aligned}$$

où $u_\beta = \frac{a - (\beta + a)e^{-\frac{\beta}{a}}}{1 - e^{-\frac{\beta}{a}}}$. Cette loi est HNBUE, car sa pseudo-fiabilité, comme représenté sur la figure 6.2, est supérieure à celle de la loi exponentielle de même moyenne. De plus si $\beta \rightarrow +\infty$, $u_\beta \rightarrow a$, et le temps résiduel en u_β^+ tend presque sûrement vers l'infini.

Nous pouvons d'ailleurs prolonger cette construction pour obtenir **une** loi pour laquelle le temps résiduel en t est non borné. Pour cela, il suffit de prolonger l'enveloppe affine par morceaux de l'exponentielle de la figure 6.2. Autrement dit, en supposant cette fois $a = 1$ pour simplifier les notations :

$$\begin{aligned}\bar{F}(u) &= 1 && \text{si } u \in [0, u_\beta[\\ \bar{F}(u) &= e^{-\frac{\beta}{a}} && \text{si } u \in [u_\beta, \beta[\\ \bar{F}(u) &= e^{-\frac{u}{a}} && \text{si } u \in [\beta, +\infty[\end{aligned}$$

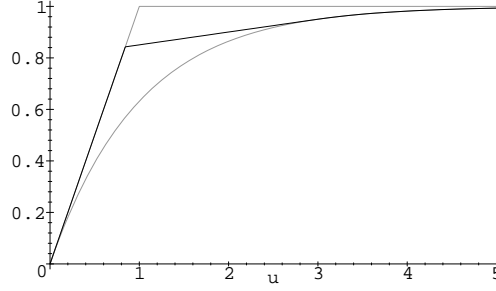


FIG. 6.2 – Pseudo-fiabilité d'une variable HNBUE

$$\begin{aligned}
 \bar{F}(u) &= 1 && \text{si } u \in [0, u_{\beta_1}[\\
 \bar{F}(u) &= e^{-\beta_1} && \text{si } u \in [u_{\beta_1}, \beta_1 + u_{\beta_2}[\\
 \bar{F}(u) &= e^{-\beta_2} && \text{si } u \in [\beta_1 + u_{\beta_2}, \beta_1 + \beta_2 + u_{\beta_3}[\\
 &\dots &&
 \end{aligned}$$

Alors, juste après $(\sum_{k=1}^i \beta_k) + u_{\beta_{i+1}}$, le temps résiduel est presque sûrement supérieur à $\beta_{i+1} + u_{\beta_{i+2}} - u_{\beta_{i+1}}$. Il suffit alors que les β_i ne soient pas bornés pour que les temps résiduels ne le soient pas non plus.

6.3.2 Voies de recherche possibles

À cause de l'exemple ci-dessus, il paraît difficile de faire un lien entre une majoration du temps de séjour dans les états dégradés, ou de la contribution des séquences avec réparation réussie, obtenue sur un modèle markovien, et celle que l'on obtiendrait dans le cas de lois HNBUE quelconques. Si nous pouvons faire ce lien dans le cas des séquences sans réparation réussie, c'est parce que nous prenons les réparations à l'origine. C'est dans ce cas là qu'il est aisé de décrire leur comportement, et de le comparer à celui de la loi exponentielle.

L'étude [9] donne un résultat non-asymptotique, et permet de plus d'utiliser l'hypothèse de réparations HNBUE pour affiner les encadrements. Néanmoins, l'hypothèse d'indépendance entre les composants est bloquante. Il faudrait étudier la possibilité qu'une étude sur des composants indépendants puisse servir de «pire des cas» par rapport à un cas où les composants sont dépendants.

Enfin, si l'on accepte de renoncer à des résultats analytiques, il serait peut-être possible d'utiliser l'encadrement [27] de la distribution d'une loi HNBUE. En effet, cette borne se prête mal à des calculs analytiques, mais pourrait parfaitement permettre d'effectuer des simulations de Monte-Carlo, naturelle ou pas.

Chapitre 7

Exemples

Les exemples présentés dans ce chapitre sont dérivés directement de problèmes industriels. Ils ont été choisis pour leur représentativité. Ils ne sont évidemment pas exclusifs d'autres applications, les temps de réparation intervenant, implicitement ou explicitement, dans la plupart des problèmes de sûreté de fonctionnement ou d'études de performances.

7.1 Récapitulatif des résultats

Nous supposons toujours que tous les temps de réparation (si il y a réparation) sont petits devant les temps de bon fonctionnement. De plus, nous supposons que des résultats très précis sont inutiles ou impossibles. Alors, à partir de l'état de l'art fait plus haut, et des résultats de la présente thèse, nous pouvons proposer la démarche résumée dans le logigramme 7.1. Pour ce logigramme, nous adoptons les conventions suivantes : les traitements sont représentés par des rectangles, les tests par des losanges, un test négatif oriente vers la branche de coté, un test positif vers la branche du dessous.

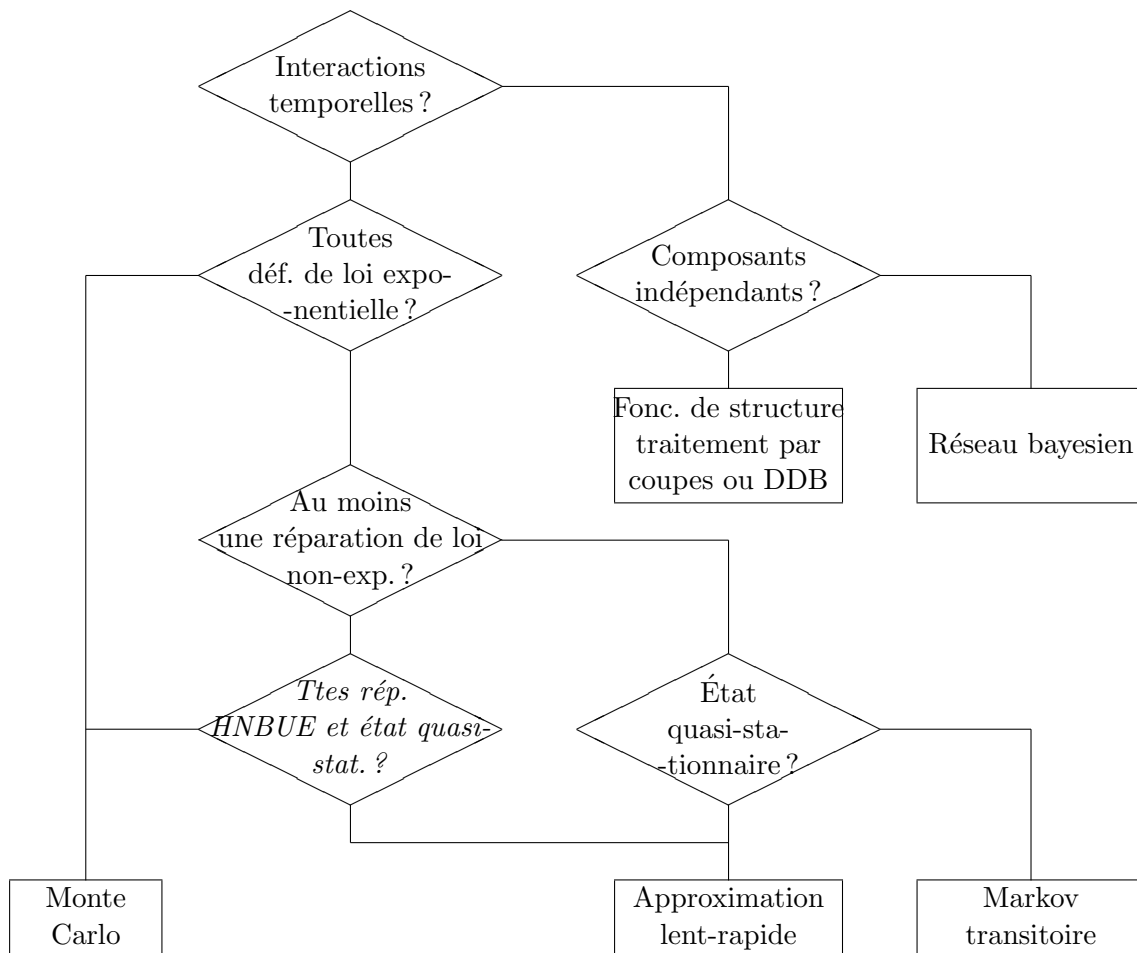


FIG. 7.1 – Logigramme

Il est nécessaire de préciser quelques points.

Dans le cas de systèmes ne comportant pas d'interactions temporelles, que les composants

soient indépendants ou pas, il est possible de calculer exactement la disponibilité (même si l'on préfère souvent utiliser l'approximation par les coupes minimales). Par ailleurs, si les composants sont indépendants, il est possible de calculer approximativement la fiabilité. La même possibilité existe probablement dans le cas de composants dépendants, représentés par un réseau bayésien.

On considère que le modèle est dans un état quasi-stationnaire dans les conditions suivantes. On note τ le maximum des temps de réparation des composants, parmi ceux qui sont finis, et T le temps sur lequel le système est étudié. Si le rapport $\frac{T}{\tau}$ est de l'ordre de 2 ou 3 (selon la précision recherchée), on dira que le système est dans un état quasi-stationnaire.

Le traitement «Markov transitoire» dépendra du nombre de composants du système.

- Si le nombre de composants est inférieur à 10 ou 20 (selon la taille mémoire de l'ordinateur et le nombre d'états des composants), il sera possible de générer et stocker le graphe complet des états du système. Alors, les probabilités de présence dans chacun des états du système se calculent à l'aide de la méthode d'uniformisation.
- Sinon, plusieurs solutions sont possibles :
 - générer un graphe tronqué, puis calculer les probabilités de présence dans chacun des états du système à l'aide de la méthode d'uniformisation,
 - calculer les probabilités de présence dans les états de panne du système en explorant les séquences menant de l'état initial du système à l'un des états de panne.

D'un point de vue pratique, le point difficile pour l'utilisation de l'approximation lent-rapide sera le calcul des probabilités de passage d'un état lent à un autre (par exemple la probabilité de passage de l'état de marche parfaite à l'état de panne). Il faudra, pour cette étape, tenir compte du nombre de composants du système.

- Si le nombre de composants est inférieur à 10 ou 20, il sera possible de générer et stocker le graphe complet des états du système. Alors, les probabilités de passage d'un état lent à un autre se calculent à l'aide d'une inversion de matrice.
- Sinon, plusieurs solutions sont possibles :
 - générer un graphe tronqué, puis calculer les probabilités de passage d'un état lent à un autre à l'aide d'une inversion de matrice,
 - calculer les probabilités de passage par simulation de Monte-Carlo avec échantillonnage d'importance,
 - calculer les probabilités de passage en explorant les séquences menant d'un état lent à un autre, et en particulier les séquences sans réparations réussies.

Une fois calculées les probabilités de passage, on est ramené au traitement «Markov transitoire».

Autrement dit, l'apport de la thèse se situe dans le point en italique : sans les résultats de la thèse, ce test disparaît, et on est obligé dans tous les cas d'utiliser la simulation de Monte-Carlo. Les exemples suivants illustrent ce cas, avec un petit nombre de composants.

7.2 Un système d'alimentation électrique secourue

7.2.1 Description du système

La fonction de structure du système est décrite à l'aide de l'arbre de défaillance de la figure 7.2.

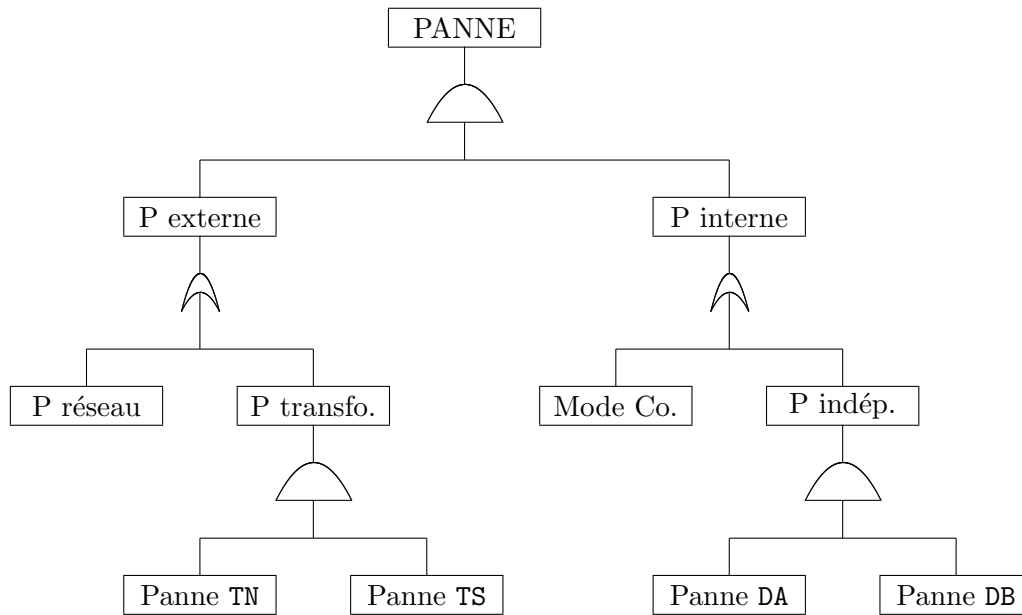


FIG. 7.2 – Arbre de défaillance

Type de composant	Mode de défaillance	Taux d'occurrence	Temps moyen de réparation
Diesels	panne indépendante	2e-3	10
	mode commun	5e-5	10
Transformateurs	panne indépendante	5e-5	20
Réseau	panne indépendante	1e-7	10

De plus, les taux de défaillance dépendent de l'état du système. Cette dépendance s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned}\lambda_{TS} &= \lambda_{TS}^0 \times \mathbf{1}(\text{Panne TN}) \\ \lambda_{DX} &= \lambda_{DX}^0 \times \mathbf{1}(\text{P externe}) \\ \lambda_{\text{Mode Co.}} &= \lambda_{\text{Mode Co.}}^0 \times \mathbf{1}(\text{P externe})\end{aligned}$$

7.2.2 Étude du système

Dans un premier temps, nous montrerons que sur cet exemple aussi, et dans le cas markovien, il est légitime de se restreindre aux séquences ne comportant aucune réparation réussie.

1. Nous calculerons exactement la fiabilité et la disponibilité de ce système à 240 heures, à l'aide de la méthode d'uniformisation.
2. Ensuite, nous calculerons ces deux probabilités, en utilisant l'approximation lent-rapide. Par exemple, dans le cas de la fiabilité, cela revient à calculer la somme des probabilités des séquences menant de l'état de marche parfaite à l'état de panne, sans repasser par l'état de marche parfaite. Ce calcul revient à une inversion de matrice.

3. Nous calculons ensuite la somme des séquences les plus importantes parmi celles ne comportant aucune réparation réussie. En effet, certaines de ces séquences comportent des défaillances inutiles, que l'on peut supprimer de la séquence en conservant son caractère accidentel.

Ces séquences «minimales» sont au nombre de 6, dont 2 paires de séquences symétriques :

- panne du réseau, panne des diesels par mode commun ;
- panne du réseau, panne du diesel DA, panne du diesel DB (et séquence symétrique) ;
- panne du transformateur TN, panne du transformateur TS, panne des diesels par mode commun ;
- panne du transformateur TN, panne du transformateur TS, panne du diesel DA, panne du diesel DB (et séquence symétrique) ;

Pour cette première étape, nous obtenons les résultats suivants.

	$\bar{A}(240)$	$\bar{R}(240)$
exact	5,70e-10	2,98e-8
approx. «lent-rapide»	5,70e-10	3,20e-8
séquences	5,43e-10	3,09e-8

Il reste à étudier la sensibilité des probabilités de séquences à la forme des lois des temps de réparation (les probabilités données en ligne 2 et 4 sont à multiplier par 2 pour retrouver la somme des probabilités des séquences). Or, nous sommes bien dans le cas décrit au chapitre précédent :

- les seuls évènements affectant ce système sont des réparations ou des défaillances, l'hypothèse 6.1.2 est vraie ;
- les réparations sont indépendantes les unes des autres, l'hypothèse 6.1.3 est donc vraie.

Nous pourrions donc utiliser, pour encadrer la fiabilité le corollaire 5.4.3, et le corollaire 5.4.5 pour la disponibilité.

Le programme Maple permettant le traitement de cet exemple se trouve en annexe 9.2.6.

calcul de fiabilité

séquence	minorant	Markov	majorant
réseau, MC diesels	9,57e-7	9,58e-7	9,98e-7
réseau, DA, DB	2,24e-7	3,79e-7	5,42e-7
TN, TS, MC diesels	2,58e-7	4,79e-7	6,78e-7
TN, TS, DA, DB	6,72e-10	1,89e-7	3,69e-7
Total	1,66e-6	2,58e-6	3,50e-6

On notera que les résultats sont plus précis dans le cas de la fiabilité : en effet, faire un calcul de disponibilité revient en fait à ajouter une étape dans les séquences.

calcul de disponibilité

séquence	minorant	Markov	majorant
réseau, MC diesels	2,80e-6	4,69e-6	6,78e-6
réseau, DA, DB	3,12e-7	1,26e-6	2,84e-6
TN, TS, MC diesels	7,56e-7	2,35e-6	4,61e-6
TN, TS, DA, DB	9,34e-10	6,32e-7	1,93e-6
Total	4,18e-6	1,08e-5	2,09e-5

Remarque : Nous pouvons effectuer une partie des calculs à la main. En effet, le taux de sortie de l'état de marche parfaite vaut :

$$\lambda_{\text{réseau}}^0 + \lambda_{\text{TS}}^0 = 1 \cdot 10^{-7} + 5 \cdot 10^{-5} = 5,01 \cdot 10^{-5}$$

Cela nous permet, à partir de la valeur «Total» de la colonne «Markov» du second tableau, de retrouver la valeur «séquences» des colonnes « $\bar{R}(240)$ » et « $\bar{A}(240)$ » :

$$\begin{aligned}\bar{R}(240) &\simeq 1 - \exp(-2,58 \cdot 10^{-6} \times 5,01 \cdot 10^{-5} \times 240) = 3,09 \cdot 10^{-8} \\ \bar{A}(240) &\simeq 1,08 \cdot 10^{-5} \times 5,01 \cdot 10^{-5} = 5,43 \cdot 10^{-10}\end{aligned}$$

7.2.3 Une variante où le nombre de réparateurs est fini

Nous reprenons ici le même système, mais en supposant qu'il n'y a qu'une seule équipe d'électriciens sur le lieu où fonctionne cette alimentation électrique. De plus, cette équipe reste sur l'équipement en cours de réparation, même si une autre défaillance a lieu. Autrement dit, une fois le transformateur TN en panne, si le transformateur TS tombe en panne, sa réparation ne commencera pas immédiatement, elle ne commencera qu'une fois celle du TN achevée. En revanche, les réparateurs des diesels DA et DB sont des équipes différentes.

Remarquons que les hypothèses 6.1.2 et 6.1.3 restent vraies. Nous utiliserons les corollaires 5.4.4 et 5.4.6, qui permettent de traiter le cas de composants irréparables.

Pour ce modèle, nous nous sommes limités aux calculs par séquences. Les résultats globaux sont les suivants.

$\bar{A}(240)$	$\bar{R}(240)$
8,56e-10	4,34e-8

Les résultats deviennent moins précis, mais restent utilisables.

calcul de fiabilité

séquence	minorant	Markov	majorant
réseau, MC diesels	9,57e-7	9,58e-7	9,98e-7
réseau, DA, DB	2,24e-7	3,79e-7	5,42e-7
TN, TS, MC diesels	0	9,22e-7	2,71e-6
TN, TS, DA, DB	0	4,85e-7	1,75e-6
Total	1,41e-6	3,61e-6	8,29e-6

Dans ce cas-là aussi, et pour les mêmes raisons, les résultats de disponibilité sont moins précis.

calcul de disponibilité

séquence	minorant	Markov	majorant
réseau, MC diesels	2,80e-6	4,69e-6	6,78e-6
réseau, DA, DB	3,12e-7	1,26e-6	2,84e-6
TN, TS, MC diesels	0	5,99e-6	2,18e-5
TN, TS, DA, DB	0	1,94e-6	1,03e-5
Total	3,43e-6	1,71e-5	5,49e-5

7.3 Un parc de pièces détachées

Ce cas est très intéressant, d'abord parce que c'est un cas courant et important en pratique (cf. [37]), ensuite parce que la forme de la loi y a une influence pratiquement nulle, du moins dans les cas simples. En effet, quand toutes les pièces sont identiques, et que l'on considère un seul type de panne par pièce, nous pouvons considérer les temps de réparation comme des variables i.i.d., et utiliser les encadrements très fins du corollaire 5.1.6.

Dans quels cas moins simples devrions-nous renoncer à ces encadrements très fins ?

- **Pas nécessairement** dans le cas des modes communs : si nous prenons en compte des modes communs, mais que nous considérons que le temps de réparation de ces défaillances suit la même loi que celui des défaillances simples, le corollaire 5.1.6 est toujours applicable.
- Dans le cas où les composants sont sujets à plusieurs types de panne (de temps de réparation différents), ou dans le cas où le stock est composé de plusieurs types de composants : dans ces cas-là, le corollaire 5.1.6 est inapplicable.

On peut noter que, dans le cas où le stock est composé de **quelques** types de pièces différents, nous serions obligés d'utiliser les théorèmes valides dans le cas où **toutes** les réparations sont différentes. Nous ne sommes pas capables, à l'heure actuelle, de tirer parti de toute l'information disponible dans ces cas intermédiaires.

Dans la suite, pour simplifier la présentation, nous considérons le cas de n composants sans défaillance de mode commun, et la probabilité qui nous intéresse est la probabilité asymptotique d'avoir le stock vide. Le taux de défaillance des composants est noté λ , et leur temps moyen de réparation r . Alors, le graphe des états du stock, dans le cas où la loi du temps de réparation est exponentielle et où $n = 4$, est représenté sur la figure 7.3 : le numéro de chaque état est le nombre de pièces disponibles dans le stock.

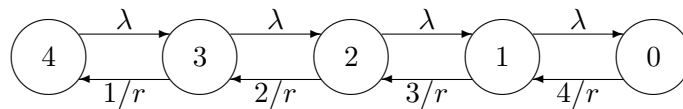


FIG. 7.3 – Graphe des états d'un parc de 4 pièces de réserve

Dans la suite, nous calculerons :

- la probabilité exacte de stock vide, dans le cas markovien,
- la probabilité de la séquence sans réparation réussie, dans le cas markovien,
- l'erreur faite sur cette probabilité, avec une loi de temps de réparation HNBUE.

Calculons la probabilité de présence dans le dernier état du graphe, numéroté 0. D'après le principe de «conservation des flux» [23], nous savons que, si l'on considère les passages entre l'état avec i pièces dans le stock et celui avec $i - 1$ pièces, on obtient :

$$\lambda \mathbb{P}(i) = \frac{i-1}{r} \mathbb{P}(i-1)$$

Par ailleurs, il faut :

$$\sum_{i=0}^n \mathbb{P}(i) = 1$$

Finalement :

$$\mathbb{P}(n) = \frac{n!(\lambda r)^n}{n! \sum_{i=0}^n \frac{(\lambda r)^i}{i!}}$$

Si nous estimons la probabilité de stock vide en ne tenant compte que de la séquence sans réparation réussie menant à l'état n , nous obtenons :

$$\frac{\lambda r}{n} \mathbb{P}(\mathcal{C}_n) = \frac{(\lambda r)^n}{n \prod_{i=1}^{n-1} (i + \lambda r)}$$

En effet, le taux de sortie du premier état est λ , le temps moyen de séjour dans le dernier état est $\frac{r}{n}$, et la probabilité de la séquence $\mathbb{P}(\mathcal{C}_n)$ se calcule comme pour l'exemple du paragraphe 5.1.1. Enfin, pour majorer l'erreur engendrée par la forme de la loi, nous utiliserons le calcul simplifié :

$$\frac{(\lambda r)^n}{n!} (en)^{-r\lambda} \leq \frac{\lambda r}{n} \mathbb{P}(\mathcal{C}_n) \leq \frac{(\lambda r)^n}{n!}$$

Nous utiliserons ces formules sur différents cas, regroupés dans un tableau. Pour chaque cas, nous donnerons :

1. la probabilité exacte $\mathbb{P}(n)$,
2. l'erreur relative due à l'estimation ne tenant compte que de la séquence sans réparation réussie, soit $\mathbb{P}(n) / (\lambda r \mathbb{P}(\mathcal{C}_n)) - 1$,
3. l'erreur relative due à la forme de la loi, soit $1 - (en)^{-r\lambda}$.

Les erreurs relatives seront exprimées en pourcentages, et $r = 1$ dans tous les cas.

λ	$n = 4$			$n = 8$		
indicateur	1	2	3	1	2	3
2e-1	5,45e-5	15%	38%	5,20e-10	34%	46%
1e-1	3,77e-6	8%	21%	2,24e-12	16%	27%
5e-2	2,48e-7	4%	11%	9,21e-15	8%	14%

7.4 Une séquence d'une EPS nucléaire

7.4.1 Introduction

Nous nous sommes inspirés de l'étude d'une famille de séquences accidentelles, intégrée dans l'étude probabiliste d'une centrale nucléaire (cf. [19]). Cette famille est celle des séquences accidentelles consécutives à la perte totale de l'eau alimentaire des générateurs de vapeur.

La séquence que nous étudierons est assez simple : alors que le réacteur fonctionne, le système N, système normal d'alimentation en eau, tombe en panne. Pendant sa réparation, le système S, système de secours, tombe aussi en panne.

Ensuite, l'opérateur dispose d'un délai D avant de décider de tenter une dernière parade. Passé ce délai, la mise en œuvre de cette parade perd de son utilité, parce que les équipements qu'il faut refroidir ont déjà trop chauffé.

Cette séquence est quantitativement importante : sa probabilité représente plus de la moitié de la probabilité de la famille de séquences.

7.4.2 Encadrement de la probabilité de perte de l'alimentation de secours

Nous voulons, dans un premier temps, calculer la probabilité P que le système S tombe en panne avant que le système N ait été réparé. Nous ne connaissons pas la loi du temps de réparation du système N, nous ne connaissons que sa moyenne, et nous la supposons HNBUE. Par ailleurs, nous ne connaissons pas directement la défiabilité du système S. Ce système est représenté séparément, par un arbre de défaillance, et son étude se fait à l'aide d'un logiciel spécifique.

Nous avons traité ce modèle sur 250 points répartis entre 0 et 100 heures. En effet, au delà de 100 heures, la probabilité de ne pas avoir récupéré le système N devient négligeable. Nous avons

ensuite importé ces 250 couples (temps, défiabilité) dans un tableur. Nous avons constaté que, **sur cet intervalle et sur les points échantillonnés**, la défiabilité du système de secours est une fonction convexe. Pour faire cette constatation, nous avons vérifié que le taux d'accroissement de la fonction, d'un point à un autre, est croissant.

Il est alors évident que, grâce à la convexité de la défiabilité du système S, supposer que la loi du temps de réparation du système normal suit une exponentielle mènera à des résultats pessimistes, et la supposer déterministe à des résultats optimistes. Ces deux calculs sont assez faciles à effectuer à l'aide du tableur.

Les écarts dus à une différence d'hypothèse sont faibles : 7%.

7.4.3 Prise en compte de la récupération par l'opérateur

L'aspect temporel de la modélisation de l'opérateur est assez simple. En effet, la parade doit être décidée avant un certain délai D . On considère donc que, avant D , il ne se passe rien. La décision de mise en œuvre des parades est examinée à la dernière minute.

Calculons la probabilité que, avant la réparation du système N, le secours soit tombé en panne, puis que l'opérateur n'ait pas mis en œuvre la parade avant le délai D . Conditionnons par R_N , durée de la réparation du système normal. Si cette réparation dure moins de D , la probabilité conditionnelle d'accident est nulle. Sinon, cette probabilité conditionnelle est la probabilité que S soit tombé en panne avant $R_N - D$. Cette probabilité est $F_S(R_N - D)$. À l'aide du théorème des probabilités totales, on conclut que la probabilité qui nous intéresse est $\mathbb{E}(F_S(R_N - D))$. La fonction $F_S(R_N - D)$ n'est pas convexe, bien que $F_S(R_N - D)$ soit convexe, parce que $F_S(0^+)$ n'est pas nulle : il a une probabilité non-nulle de défaillance à la sollicitation du système S.

Pour retrouver la convexité, il faut accepter d'être un peu pessimiste. Autrement dit sur l'intervalle $[0, D]$, on utilise la valeur $F_S(0^+)$. On peut alors de nouveau utiliser la convexité. Il faut ensuite calculer la probabilité que, pendant le délai D , le système S soit réparé. Pour cela, nous devrions connaître la fonction de répartition du temps de réparation du système S, dont nous ne connaissons que la moyenne. On peut donc, pour cela, utiliser [45], et la figure 7.4.

Finalement, sur ce cas, l'erreur relative due aux changements d'hypothèses est inférieure à

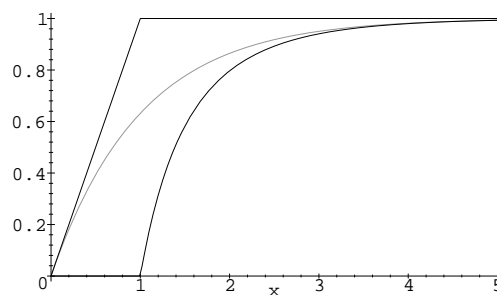


FIG. 7.4 – Enveloppe de la fonction de répartition d'une variable IFRA

6%.

7.4.4 Étude de sensibilité

Dans quels cas les résultats que nous avons obtenus seraient-ils moins bons ? Les probabilités de défaillance des deux systèmes **N** et **S** sont assez peu convexes : par conséquent, l'effet de la forme de la loi des temps de réparation est de toutes façons relativement faible.

En revanche, en ce qui concerne la probabilité de réparation du système **N**, il suffirait que le délai D soit un peu plus long, et proche du temps moyen de réparation du système **N**, pour que l'incertitude soit plus grande. En effet, la probabilité P d'avoir réparé le système **N** à temps est encadrée par :

$$1 - \frac{D}{\tau_N} \leq P \leq 1$$

Il suffit donc que D soit proche de τ_N pour que la largeur de l'intervalle augmente.

Chapitre 8

Conclusion

Nous nous sommes intéressés aux études de sûreté de fonctionnement, pour des systèmes présentant les caractéristiques suivantes :

- les défaillances sont de loi exponentielle,
- les temps moyens de réparations (MTTR) sont connus, mais la loi elle-même est inconnue,
- toutes les réparations sont beaucoup plus rapides que toutes les défaillances,
- les paramètres d'intérêt sont les valeurs asymptotiques de la disponibilité et du taux de défaillance.

Puisque nous ne connaissons pas la loi des temps de réparations, il faut évaluer l'impact de cette incertitude sur la disponibilité et la fiabilité.

Si les composants de ces systèmes sont indépendants, il est connu que la loi des temps de réparation (comme celle des temps de bon fonctionnement, d'ailleurs) n'a pas d'importance, seule compte leur durée moyenne. Dans le cas contraire, nous proposons des encadrements, valides sous les conditions suivantes :

1. les réparations sont de loi vieillissante (HNBUE),
2. le nombre de réparateurs n'est pas borné, ou bien, s'il est borné, la réparation entamée est prioritaire,
3. les séquences prépondérantes, en terme de probabilité, sont celles ne comportant que des défaillances, sans réparation réussie,
4. le temps de séjour dans les états où au moins une réparation est en cours est faible devant le temps de séjour dans les autres états de marche, ainsi que devant le temps sur lequel le système fonctionne.

Nous montrons alors les résultats suivants.

Il est possible d'approcher (avec une erreur maximale connue) les paramètres de sûreté de fonctionnement d'un système, en ne connaissant des réparations que leur durée moyenne. Cependant, dans le cas où le nombre de réparateurs est borné, la borne inférieure de l'encadrement est nulle.

De plus, cette approximation peut être faite à l'aide de modèles markoviens, dont l'utilisation est maintenant bien maîtrisée, y compris quant à la mise en œuvre informatique.

Enfin, le calcul de l'erreur maximale peut, dans de nombreux cas, être effectué manuellement.

Certains points mériteraient des travaux mathématiques complémentaires.

Les troisième et quatrième hypothèses, qui portent sur la prépondérance des séquences ne comportant que des défaillances, et sur la petitesse du temps de séjour dans les états dégradés, sont des hypothèses globales sur le système. À ce titre, il est difficile de savoir si elles sont vraies ou fausses pour un système donné. Il faudrait donc développer les méthodes mathématiques permettant de valider ces hypothèses. Nous proposons quelques pistes en section 6.3.2. Il serait aussi utile d'améliorer les résultats dans le cas où le nombre de réparateurs est borné. En effet, il est peut-être possible, par exemple d'après les voies de recherche esquissées en 5.5, de disposer d'une minoration non-triviale, ainsi que de meilleurs majorants.

D'un point de vue plus pratique, l'utilisation des résultats montrés ici pourrait être facilitée par une mise en œuvre informatique.

Chapitre 9

Annexes

9.1 Mise en œuvre des calculs pour le calcul de la fonction p_m

9.1.1 Équations à résoudre

La fonction u_β est croissante en fonction de β , et continue. Elle a donc un inverse, lui aussi continu croissant. On aura besoin de calculer cet inverse.

$$u_\beta^{-1}(t) = t - a - aW\left(-1, \left(\frac{t}{a} - 1\right)e^{\frac{t}{a}-1}\right)$$

où $W(-1, x)$ (notation du logiciel Maple) désigne l'une des branches de la fonction de Lambert. Cette fonction associe, à chaque valeur de x , les solutions de l'équation

$$y \times e^y = x$$

Cette équation a une infinité de solutions, et $W(-1, x)$ est la branche à valeurs réelles sur $]e^{-1}, 0[$.

On note :

$$\begin{aligned} S_1 = & 2 + b + \beta^3 e^{2\beta} b - 2 e^{-b+4\beta} b \beta - 2 \beta b e^\beta - 2 e^{-b+2\beta} b \beta + 4 e^{-b+3\beta} b \beta - \beta b e^{2\beta} + \beta^2 b e^{3\beta} \\ & - 2 \beta b e^{4\beta} + 4 \beta b e^{3\beta} - 3 \beta^2 e^{2\beta} b - 5 e^\beta + e^{3\beta} + 3 e^{2\beta} - e^{4\beta} + 2 e^{-b+4\beta} + 6 e^{-b+2\beta} \\ & - 6 e^{-b+3\beta} - 2 e^{-b+\beta} + \beta + \beta b + \beta^2 e^{4\beta} + \beta^3 e^{2\beta} - 5 b e^\beta + 2 \beta e^\beta + 9 b e^{2\beta} + 2 \beta^2 e^\beta \\ & - 7 b e^{3\beta} + 4 \beta e^{3\beta} - 7 \beta e^{2\beta} - 3 \beta^2 e^{3\beta} + 2 b e^{4\beta} - 2 e^{-b+\beta} b - 6 e^{-b+3\beta} b + 6 e^{-b+2\beta} b \\ & - 2 e^{-b+2\beta} \beta + 2 e^{-b+4\beta} b - 2 e^{-b+4\beta} \beta + 4 e^{-b+3\beta} \beta + 2 \beta^2 e^\beta b \\ S_2 = & -1 + 2b + 3b^2 e^{-\beta} + b e^{-4\beta} - e^{-4\beta} \beta - b^3 e^{-4\beta} + b^3 e^{-\beta} + b^2 e^{-3\beta} - \beta^3 e^{-4\beta} + 7 \beta^2 e^{-3\beta} \\ & + 4 e^{-\beta} \beta - 7 b e^{-\beta} - 5 b e^{-3\beta} + 6 \beta e^{-3\beta} - 9 \beta e^{-2\beta} + 9 b e^{-2\beta} - 2 \beta^2 e^{-4\beta} + 2 \beta^3 e^{-3\beta} \\ & - 3 b^3 e^{-2\beta} - 3 b^2 e^{-2\beta} + 3 b^3 e^{-3\beta} - 5 \beta^2 e^{-2\beta} - 3 e^{-2\beta} + e^{-3\beta} + 3 e^{-\beta} + 3 e^{-4\beta} \beta b \\ & - \beta^2 e^{-3\beta} b - b^3 e^{-4\beta} \beta - b^3 e^{-2\beta} \beta - b^2 - 2 b^2 e^{-3\beta} \beta - 10 \beta b e^{-3\beta} + 11 \beta b e^{-2\beta} \\ & - 4 e^{-\beta} \beta b + 2 \beta^2 b^2 e^{-4\beta} - 4 \beta^2 b^2 e^{-3\beta} + 2 \beta^3 e^{-3\beta} b + b^2 e^{-2\beta} \beta + \beta^2 b e^{-4\beta} \\ & - \beta^3 e^{-4\beta} b + 2 b^3 e^{-3\beta} \beta + 2 e^{-2\beta} \beta^2 b^2 + b^2 e^{-4\beta} \beta \\ N_1 = & 2 \beta b e^{2\beta} + 2 e^{-b+\beta} - e^{2\beta} - 1 + 2 e^\beta - 2 \beta b e^\beta + 2 \beta e^\beta - 2 \beta e^{2\beta} - \beta^2 e^{2\beta} \\ & + 2 \beta^2 e^\beta + 2 e^{-b+3\beta} - 4 e^{-b+2\beta} \\ N_2 = & b^2 e^{2\beta} - 2 b^2 e^\beta + b^2 - 2 b e^{2\beta} + 4 b e^\beta + e^{2\beta} - 2 \beta e^\beta - 2 e^\beta \\ & + 2 \beta b e^\beta - 2 \beta b + \beta^2 + 2 \beta - 2 b + 1 \\ K_1 = & \frac{N_1 e^{-\beta}}{2(-e^\beta + \beta b + \beta + 1)(e^\beta - 1)} \\ K_2 = & \frac{N_2 e^{-\beta}}{2(-e^\beta + \beta b + \beta + 1)(e^\beta - 1)} \end{aligned}$$

Pour chercher le minimum, on calculera :

- si $b < b_{\text{limite}}$, la valeur de $K_2(b, \beta)$ pour β racine de $S_2(b, \beta) = 0$ avec $\beta \in [b, u_\beta^{-1}(b)]$,
- si $b > b_{\text{limite}}$, la valeur de $K_1(b, \beta)$ pour β racine de $S_1(b, \beta) = 0$ avec $\beta \in [0, b]$,

9.1.2 Résultats

On obtient finalement le tableau de valeurs suivant, dans lequel le paramètre est $p = \frac{b}{b+1}$, qui est la probabilité obtenue dans le cas markovien, et qui présente l'avantage, comme paramètre, d'avoir un intervalle de variation borné.

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0002	0,0008	0,0017	0,0030	0,0045	0,0064	0,0086	0,0110	0,0137
0,1	0,0166	0,0198	0,0232	0,0268	0,0306	0,0347	0,0389	0,0433	0,0479	0,0527
0,2	0,0577	0,0628	0,0682	0,0737	0,0795	0,0854	0,0915	0,0978	0,1043	0,1110
0,3	0,1178	0,1249	0,1323	0,1398	0,1476	0,1556	0,1638	0,1722	0,1810	0,1899
0,4	0,1991	0,2086	0,2182	0,2282	0,2384	0,2489	0,2596	0,2705	0,2818	0,2933
0,5	0,3050	0,3170	0,3293	0,3418	0,3546	0,3676	0,3808	0,3943	0,4081	0,4220
0,6	0,4362	0,4506	0,4652	0,4801	0,4951	0,5102	0,5256	0,5411	0,5567	0,5724
0,7	0,5882	0,6041	0,6201	0,6361	0,6521	0,6681	0,6841	0,7000	0,7157	0,7314
0,8	0,7469	0,7623	0,7774	0,7923	0,8069	0,8212	0,8353	0,8490	0,8624	0,8754
0,9	0,8882	0,9006	0,9127	0,9245	0,9360	0,9473	0,9583	0,9691	0,9796	0,9899

9.2 Fichiers Maple

Ces calculs ont été réalisés avec la version 5.4.

9.2.1 Calcul de la disponibilité d'un composant à temps de réparation déterministe

```
> restart;
> A1:=sum(Heaviside(t-i)*lambda^i*(t-i)^i*exp(-lambda*(t-i))/i!,i=0..N);
> A0:=1;
> A:=piecewise(t=0,A0,t<>0,A1);
> A1:=1/(1+lambda);
> V:=A-A1;
> lambda:=1;N:=10;
> Digits:=60;
> plot(V,t=0..4);
```

9.2.2 Calcul des bornes pour le premier exemple du paragraphe 5.1.1

```
>
restart;pm:=x->piecewise(x<.1e-1,.2e-1*x,x<.2e-1,-.4e-3+.6e-1*x,x<.3e-1,-.10e-2+.9e-1*x,x<.4e-1,-.22e-2+.13*x,x<.5e-1,-.30e-2+.15*x,x<.6e-1,-.50e-2+.19*x,x<.7e-1,-.68e-2+.22*x,x<.8e-1,-.82e-2+.24*x,x<.9e-1,-.106e-1+.27*x,x<.1,-.124e-1+.29*x,x<.11,-.154e-1+.32*x,x<.12,-.176e-1+.34*x,x<.13,-.200e-1+.36*x,x<.14,-.226e-1+.38*x,x<.15,-.268e-1+.41*x,x<.16,-.283e-1+.42*x,x<.17,-.315e-1+.44*x,x<.18,-.349e-1+.46*x,x<.19,-.385e-1+.48*x,x<.2,-.423e-1+.50*x,x<.21,-.443e-1+.51*x,x<.22,-.506e-1+.54*x,x<.23,-.528e-1+.55*x,x<.24,-.597e-1+.58*x,x<.25,-.621e
```

```

-1+.59*x,x<.26,-.671e-1+.61*x,x<.27,-.723e-1+.63*x,x<.28,-.777e-1+.65*x,x<.29,
-.833e-1+.67*x,x<.3,-.862e-1+.68*x,x<.31,-.952e-1+.71*x,x<.32,-.1045+.74*x,x<.
33,-.1077+.75*x,x<.34,-.1176+.78*x,x<.35,-.1244+.80*x,x<.36,-.1314+.82*x,x<.37
,-.1386+.84*x,x<.38,-.1534+.88*x,x<.39,-.1572+.89*x,x<.4,-.1689+.92*x,x<.41,-.
1809+.95*x,x<.42,-.1850+.96*x,x<.43,-.2018+1.00*x,x<.44,-.2104+1.02*x,x<.45,-.
2236+1.05*x,x<.46,-.2326+1.07*x,x<.47,-.2418+1.09*x,x<.48,-.2606+1.13*x,x<.49,
-.2702+1.15*x,x<.5,-.2800+1.17*x,x<.51,-.2950+1.20*x,x<.52,-.3103+1.23*x,x<.53
,-.3207+1.25*x,x<.54,-.3366+1.28*x,x<.55,-.3474+1.30*x,x<.56,-.3584+1.32*x,x<.
57,-.3752+1.35*x,x<.58,-.3923+1.38*x,x<.59,-.3981+1.39*x,x<.6,-.4158+1.42*x,x<
.61,-.4278+1.44*x,x<.62,-.4400+1.46*x,x<.63,-.4586+1.49*x,x<.64,-.4649+1.50*x,
x<.65,-.4713+1.51*x,x<.66,-.4908+1.54*x,x<.67,-.4974+1.55*x,x<.68,-.5041+1.56*
x,x<.69,-.5109+1.57*x,x<.7,-.5178+1.58*x,x<.71,-.5248+1.59*x,x<.72,-.5319+1.60
*x,x<.73,-.5319+1.60*x,x<.74,-.5319+1.60*x,x<.75,-.5319+1.60*x,x<.76,-.5319+1.
60*x,x<.77,-.5243+1.59*x,x<.78,-.5089+1.57*x,x<.79,-.5089+1.57*x,x<.8,-.4931+1
.55*x,x<.81,-.4851+1.54*x,x<.82,-.4608+1.51*x,x<.83,-.4444+1.49*x,x<.84,-.4195
+1.46*x,x<.85,-.3943+1.43*x,x<.86,-.3773+1.41*x,x<.87,-.3429+1.37*x,x<.88,-.31
68+1.34*x,x<.89,-.2816+1.30*x,x<.9,-.2638+1.28*x,x<.91,-.2278+1.24*x,x<.92,-.2
005+1.21*x,x<.93,-.1729+1.18*x,x<.94,-.1450+1.15*x,x<.95,-.1262+1.13*x,x<.96,-
.977e-1+1.10*x,x<.97,-.785e-1+1.08*x,x<.98,-.494e-1+1.05*x,x<.99,-.298e-1+1.03
*x,-.100e-1+1.01*x):pM:=p->exp(1)*p^(1/(1-p)):
> PMark:=n->product(lambda*r/(i+lambda*r),i=1..n);
> Pm:=n->(lambda*r)^n*product(pm(1/(i+lambda*r)),i=1..n);
> PM:=n->(lambda*r)^n*product(pM(1/i),i=2..n);
> PMJLB:=n->(lambda*r)^n*(1-exp(-1))^(n-1);
> Rm:=n->PMark(n)/Pm(n);
> RM:=n->PM(n)/PMark(n):RMJLB:=n->PMJLB(n)/PMark(n);
> lambda:=1e-1:r:=1:nmax:=10:
> evalf(RM(nmax)/exp(nmax));evalf(Rm(nmax)/(nmax!/2^nmax));
> print(nombre,maj/M,M,M/min);
> for n from 2 to nmax do
>   print(n,evalf(RMJLB(n)),evalf(RM(n)),evalf(PMark(n)),evalf(Rm(n)));
> od;

```

9.2.3 Limite en 1 de p_m

```

> restart;
> a:=1;
> ul:=(a-(beta+a)*exp(-beta/a))/(1-exp(-beta/a));
> fX1:=exp(-beta/a)/a;
> fX2:=exp(-u/a)/a;
> FbY:=1-u/b;
> P1:=int(fX1*FbY,u=ul..beta)+int(fX2*FbY,u=beta..b);
> dP1t:=simplify(diff(P1,beta)/diff(ul,beta));
> beta:=2/b;
> T:=t->P1+(t-ul)*dP1t;
> pos:=simplify(T(b/(b+1)));
> plot(pos,b=2..9);

```

```

> un:=simplify(T(0));
> plot(un,b=2..9);
> limit(un,b=+infinity);
> restart;
>
Numpos:=4*exp(-(b^2+2)/b)*b^3-2*b^3+2*b-2*exp(-b)*b^2+2*exp(-2/b)*b^2+6*exp(-4/b)*b+5*b^3*exp(-2/b)+4*exp(-4/b)-7*exp(-4/b)*b^2-6*b*exp(-2/b)-4*exp(-4/b)*b^3+4*exp(-6/b)*b^2+2*exp(-6/b)*b-2*exp(-b)*b^3+b^2-2*exp(-(b^2+4)/b)*b^3-2*exp(-(b^2+4)/b)*b^2+4*exp(-(b^2+2)/b)*b^2+exp(-6/b)*b^3;
> taylor(Numpos,b=+infinity);

```

9.2.4 Calcul de b_{limite}

```

> restart;
> a:=1;
> ul:=(a-(beta+a)*exp(-beta/a))/(1-exp(-beta/a));
> fX1:=exp(-beta/a)/a;
> fX2:=exp(-u/a)/a;
> FbY:=1-u/b;
> P1:=int(fX1*FbY,u=ul..beta)+int(fX2*FbY,u=beta..b);
> P2:=int(fX1*FbY,u=ul..b);
> k1:=P1/(1-ul*(1/a+1/b));
> dk1:=simplify(diff(k1,beta));
> k2:=P2/(1-ul*(1/a+1/b));
> dk2:=simplify(diff(k2,beta));
> beta:=b;simplify(dk1-dk2);
> simplify(dk1);
> restart;
>
signe:=2*b^3*exp(-3*b)-2*b^2*exp(-3*b)-b^2-2*b^3*exp(-2*b)+b^3*exp(-b)+b^4*exp(-2*b)+3*b^2*exp(-2*b)-b^2*exp(-b)+b*exp(-3*b)+3*exp(-b)-3*exp(-2*b)-3*b*exp(-b)+b^2*exp(-4*b)+exp(-3*b)+2*b-1;
> plot(signe,b=0..6);plot(signe,b=0..0.6);
> Digits:=40;blimite:=fsolve(signe=0,b,0.4..0.6,fulldigits);
> restart;
>
signe:=2*b^3*c^3-2*b^2*c^3-b^2-2*b^3*c^2+b^3*c+b^4*c^2+3*b^2*c^2-b^2*c+b*c^3+3*c-3*c^2-3*b*c+b^2*c^4+c^3+2*b-1;
> solve(signe=0,b);
> bon:=(-1/2+1/2*(5-4*c)^(1/2))/c;
>
limit(bon+ln(c),c=0,right);plot([bon+ln(c)],c=0.1..1,color=[blue],numpoints=500);
> Digits:=20;climite:=fsolve(bon+ln(c)=0,c,0.4..0.8);-ln(climite);
> der:=simplify(diff(bon+ln(c),c));
> c:=(5-d^2)/4;simplify(der);
>

```

```
plot(5+d^2-7*d+d^3,d=1..sqrt(5));solve(5+d^2-7*d+d^3=0);evalf(solve(5+d^2-7*d+d^3=0));
```

9.2.5 Calcul de p_m

```
> restart;
> a:=1;
> ul:=(a-(beta+a)*exp(-beta/a))/(1-exp(-beta/a));
> fX1:=exp(-beta/a)/a;
> fX2:=exp(-u/a)/a;
> FbY:=1-u/b;
> P1:=int(fX1*FbY,u=ul..beta)+int(fX2*FbY,u=beta..b);
> P2:=int(fX1*FbY,u=ul..b);
> k1:=P1/(1-ul*(1/a+1/b));
> dk1:=simplify(diff(k1,beta));
> k2:=P2/(1-ul*(1/a+1/b));
> dk2:=simplify(diff(k2,beta));
>
restart;blimite:=.5142299133197128721472700831709692530056;plimite:=blimite/(b
limite+1);
>
s1:=-5*exp(beta)+beta^2*b*exp(3*beta)+2-3*beta^2*exp(2*beta)*b+b+beta+4*beta*b
*exp(3*beta)-beta*b*exp(2*beta)-2*beta*b*exp(4*beta)+beta^3*exp(2*beta)*b-2*ex
p(-b+4*beta)*b*beta-2*beta*b*exp(beta)-2*exp(-b+2*beta)*b*beta+4*exp(-b+3*beta
)*b*beta+beta*b-5*b*exp(beta)+2*beta*exp(beta)+9*b*exp(2*beta)+3*exp(2*beta)+2
*beta^2*exp(beta)+2*beta^2*exp(beta)*b-7*b*exp(3*beta)+4*beta*exp(3*beta)-7*be
ta*exp(2*beta)-3*beta^2*exp(3*beta)+2*b*exp(4*beta)+beta^2*exp(4*beta)+beta^3*
exp(2*beta)-2*exp(-b+beta)*b-6*exp(-b+3*beta)*b+6*exp(-b+2*beta)*b+exp(3*beta)
-2*exp(-b+beta)-6*exp(-b+3*beta)+6*exp(-b+2*beta)-exp(4*beta)+2*exp(-b+4*beta)
-2*exp(-b+2*beta)*beta+2*exp(-b+4*beta)*b-2*exp(-b+4*beta)*beta+4*exp(-b+3*bet
a)*beta;
>
s2:=2*exp(-2*beta)*beta^2*b^2+2*b+2*b^3*exp(-3*beta)*beta+b^2*exp(-2*beta)*bet
a+3*exp(-beta)+beta^2*b*exp(-4*beta)+7*beta^2*exp(-3*beta)-beta^3*exp(-4*beta)
*b+2*beta^3*exp(-3*beta)*b-4*beta^2*b^2*exp(-3*beta)-3*exp(-2*beta)+2*beta^2*b
^2*exp(-4*beta)+4*exp(-beta)*beta-7*b*exp(-beta)-5*b*exp(-3*beta)+6*beta*exp(-
3*beta)+b*exp(-4*beta)-exp(-4*beta)*beta-9*beta*exp(-2*beta)+exp(-3*beta)-b^3*
exp(-4*beta)-4*exp(-beta)*beta*b+11*beta*b*exp(-2*beta)-beta^2*exp(-3*beta)*b-
b^3*exp(-4*beta)*beta-10*beta*b*exp(-3*beta)+9*b*exp(-2*beta)-b^3*exp(-2*beta)
*beta+3*b^2*exp(-beta)-2*beta^2*exp(-4*beta)+2*beta^3*exp(-3*beta)-3*b^3*exp(-
2*beta)-3*b^2*exp(-2*beta)+b^3*exp(-beta)+3*b^3*exp(-3*beta)-b^2-5*beta^2*exp(-
2*beta)-2*b^2*exp(-3*beta)*beta+b^2*exp(-3*beta)-1+b^2*exp(-4*beta)*beta+3*ex
p(-4*beta)*beta*b-beta^3*exp(-4*beta);
>
K1:=beta->1/2*exp(-beta)*(2*beta*b*exp(2*beta)+2*exp(-b+beta)-exp(2*beta)-1+2*
exp(beta)-2*beta*b*exp(beta)+2*beta*exp(beta)-2*beta*exp(2*beta)-beta^2*exp(2*
beta)+2*beta^2*exp(beta)+2*exp(-b+3*beta)-4*exp(-b+2*beta))/(-exp(beta)+beta*b
```

```

+beta+1)/(exp(beta)-1);
>
K2:=beta->1/2*exp(-beta)*(b^2*exp(2*beta)-2*b^2*exp(beta)+b^2-2*b*exp(2*beta)+
4*b*exp(beta)+exp(2*beta)-2*beta*exp(beta)-2*exp(beta)+2*beta*b*exp(beta)-2*be
ta*b+beta^2+2*beta-2*b+1)/(-exp(beta)+beta*b+beta+1)/(exp(beta)-1);
> invu:=t->t-LambertW(-1,(t-1)*exp(t-1))-1;floor(x/pas);
> Digits:=100;petit:=2e-2;pas:=1e-2;debut:=.01;fin:=.98;
> for i from floor(debut/pas) by 1 to floor(plimite/pas) do p:=i*pas;
b:=p/(1-p); evalf(K2(fsolve(s2=0,beta,b..(1-petit)*invu(b),fulldigits))); od;
> for i from floor(plimite/pas)+1 by 1 to floor(fin/pas) do p:=i*pas;
b:=p/(1-p); evalf(K1(fsolve(s1=0,beta,petit..b,fulldigits))); od;
>
>
p:=.99;b:=p/(1-p);plot(s1,beta=0..0.03);evalf(K1(fsolve(s1=0,beta,petit..0.03,
fulldigits)));

```

9.2.6 Traitement du système d'alimentation électrique secourue

1=reseau, 2= TN, 3=TS, 4=Mode commun diesels, 5=DA, 6=DB

la panne est 1, car l'état parfait est 0. la panne est TRUE, car on utilise un ADD.

donnees globales

```

> restart;fiab:=1:t:=240:erreur:=1e-6;
> mu:=array(1..6):lambda:=array(1..6):
>
lambda[1]:=1e-7:lambda[2]:=5e-5:lambda[3]:=5e-5:lambda[4]:=5e-5:lambda[5]:=2e-
3:lambda[6]:=2e-3;
> mu[1]:=1/10:mu[2]:=1/20:mu[3]:=1/20:mu[4]:=1/10:mu[5]:=1/10:mu[6]:=1/10:
> print(lambda,mu);
>
tau:=1/min(mu[1],mu[2],mu[3],mu[4],mu[5],mu[6]);Lambda0:=max(lambda[1],lambda[
2],lambda[3],lambda[4],lambda[5],lambda[6]);Lambda:=lambda[1]+lambda[2]+lambda
[3]+lambda[4]+lambda[5]+lambda[6];Lambda*tau;
fonctions logiques
> etat:=(e,c)->frac(floor(e/2^(c-1))/2)*2;
> Pext:=e->1-(1-etat(e,1))*(1-etat(e,2)*etat(e,3));
> Pint:=e->1-(1-etat(e,4))*(1-etat(e,5)*etat(e,6));
> Panne:=e->Pext(e)*Pint(e);
> soll:=(e,c)->piecewise(c<3,1,c=3,etat(e,2),Pext(e));
> vie:=e->1-Panne(e)*fiab;
creation des matrices
> A:=array(sparse,1..64,1..64):
> P:=array(sparse,1..64):P[1]:=1:
> Pan:=array(sparse,1..64):
> Diag:=array(sparse,1..64):
remplissage des matrices, avec dependances
> for e from 0 to 63 do Pan[e+1]:=evalf(Panne(e)) od:

```

```

> q:=0:
> for e from 0 to 63 do
>   for c from 1 to 6 do
>     if (etat(e,c)=1) then
>       A[e+1,e-2^(c-1)+1]:=mu[c]*evalf(vie(e));
>       Diag[e+1]:=Diag[e+1]+mu[c]*evalf(vie(e));
>     else
>       A[e+1,e+2^(c-1)+1]:=lambda[c]*evalf(soll(e,c)*vie(e));
>       Diag[e+1]:=Diag[e+1]+lambda[c]*evalf(soll(e,c)*vie(e))
>     fi;
>   od;
> od;
> for e from 0 to 63 do A[e+1,e+1]:=-Diag[e+1]; q:=max(q,Diag[e+1]); od:
calculs uniformisation
> with(linalg):
> Q:=array(sparse,identity,1..64,1..64)+A/q:
> with(stats):
> q*t;bornedroite:=statevalf[idcdf,poisson[q*t]](1-erreur);
> Resexact:=0:
> for i from 0 to bornedroite do
>   P:=multiply(transpose(Q),P);
>
Resexact:=Resexact+multiply(transpose(Pan),P)*statevalf[pf,poisson[q*t]](i);
>   print(i);
> od:
> Resexact;
matrices pour les calculs d'inverse
> QR:=array(sparse,1..64,1..64):
> QRL:=array(sparse,1..64,1..64):
> TR:=array(sparse,1..64,1..64):
> ALR:=array(sparse,1..64,1..64):
> MI:=array(sparse,identity,1..64,1..64):
> lent:=e->(((Panne(e-1)=1) and (fiab=1)) or (e=1)):
> M:=array(sparse,1..64,1..64):
> P0:=array(sparse,1..64):P0[1]:=1:
Vrai inverse
> for e from 1 to 64 do
>   if lent(e) then
>     TR[e,e]:=0;
>     for f from 1 to 64 do ALR[e,f]:=A[e,f] od;
>   else
>     TR[e,e]:=1/Diag[e];
>     for f from 1 to 64 do
>       if lent(f) then QRL[e,f]:=A[e,f]/Diag[e]
>       else QR[e,f]:=A[e,f]/Diag[e] fi;
>     od;
>   fi;

```

```

> QR[e,e]:=0;
> od:
> M:=multiply(transpose(P0),ALR,inverse(MI-QR)):
> if (fiab=1) then ResMTND:=multiply(M,QRL,Pan)*t else
ResMTND:=multiply(M,TR,Pan) fi;
sequences
>
pm:=x->piecewise(x<.1e-1,.2e-1*x,x<.2e-1,-.4e-3+.6e-1*x,x<.3e-1,-.10e-2+.9e-1*
x,x<.4e-1,-.22e-2+.13*x,x<.5e-1,-.30e-2+.15*x,x<.6e-1,-.50e-2+.19*x,x<.7e-1,-.
68e-2+.22*x,x<.8e-1,-.82e-2+.24*x,x<.9e-1,-.106e-1+.27*x,x<.1,-.124e-1+.29*x,x
<.11,-.154e-1+.32*x,x<.12,-.176e-1+.34*x,x<.13,-.200e-1+.36*x,x<.14,-.226e-1+.
38*x,x<.15,-.268e-1+.41*x,x<.16,-.283e-1+.42*x,x<.17,-.315e-1+.44*x,x<.18,-.34
9e-1+.46*x,x<.19,-.385e-1+.48*x,x<.2,-.423e-1+.50*x,x<.21,-.443e-1+.51*x,x<.22
,-.506e-1+.54*x,x<.23,-.528e-1+.55*x,x<.24,-.597e-1+.58*x,x<.25,-.621e-1+.59*x
,x<.26,-.671e-1+.61*x,x<.27,-.723e-1+.63*x,x<.28,-.777e-1+.65*x,x<.29,-.833e-1
+.67*x,x<.3,-.862e-1+.68*x,x<.31,-.952e-1+.71*x,x<.32,-.1045+.74*x,x<.33,-.107
7+.75*x,x<.34,-.1176+.78*x,x<.35,-.1244+.80*x,x<.36,-.1314+.82*x,x<.37,-.1386+
.84*x,x<.38,-.1534+.88*x,x<.39,-.1572+.89*x,x<.4,-.1689+.92*x,x<.41,-.1809+.95
*x,x<.42,-.1850+.96*x,x<.43,-.2018+1.00*x,x<.44,-.2104+1.02*x,x<.45,-.2236+1.0
5*x,x<.46,-.2326+1.07*x,x<.47,-.2418+1.09*x,x<.48,-.2606+1.13*x,x<.49,-.2702+1
.15*x,x<.5,-.2800+1.17*x,x<.51,-.2950+1.20*x,x<.52,-.3103+1.23*x,x<.53,-.3207+
1.25*x,x<.54,-.3366+1.28*x,x<.55,-.3474+1.30*x,x<.56,-.3584+1.32*x,x<.57,-.375
2+1.35*x,x<.58,-.3923+1.38*x,x<.59,-.3981+1.39*x,x<.6,-.4158+1.42*x,x<.61,-.42
78+1.44*x,x<.62,-.4400+1.46*x,x<.63,-.4586+1.49*x,x<.64,-.4649+1.50*x,x<.65,-.
4713+1.51*x,x<.66,-.4908+1.54*x,x<.67,-.4974+1.55*x,x<.68,-.5041+1.56*x,x<.69,
-.5109+1.57*x,x<.7,-.5178+1.58*x,x<.71,-.5248+1.59*x,x<.72,-.5319+1.60*x,x<.73
,-.5319+1.60*x,x<.74,-.5319+1.60*x,x<.75,-.5319+1.60*x,x<.76,-.5319+1.60*x,x<.
77,-.5243+1.59*x,x<.78,-.5089+1.57*x,x<.79,-.5089+1.57*x,x<.8,-.4931+1.55*x,x<
.81,-.4851+1.54*x,x<.82,-.4608+1.51*x,x<.83,-.4444+1.49*x,x<.84,-.4195+1.46*x,
x<.85,-.3943+1.43*x,x<.86,-.3773+1.41*x,x<.87,-.3429+1.37*x,x<.88,-.3168+1.34*
x,x<.89,-.2816+1.30*x,x<.9,-.2638+1.28*x,x<.91,-.2278+1.24*x,x<.92,-.2005+1.21
*x,x<.93,-.1729+1.18*x,x<.94,-.1450+1.15*x,x<.95,-.1262+1.13*x,x<.96,-.977e-1+
1.10*x,x<.97,-.785e-1+1.08*x,x<.98,-.494e-1+1.05*x,x<.99,-.298e-1+1.03*x,-.100
e-1+1.01*x):pM:=p->exp(1)*p^(1/(1-p)):
>
PS1:=(lambda[1]/(lambda[1]+lambda[2]))*(lambda[4]/(mu[1]+lambda[2]+lambda[3]+l
ambda[4]+lambda[5]+lambda[6]))/(mu[1]+lambda[2]+mu[4]+lambda[3]+lambda[5]+lamb
da[6])^(1-fiab);
>
PS1M:=evalf((lambda[1]/(lambda[1]+lambda[2]))*(lambda[4]/mu[1]))*(pM(mu[4]/(mu[
1]+mu[4]))/mu[4])^(1-fiab));
>
PS1m:=(lambda[1]/(lambda[1]+lambda[2]))*(lambda[4]/mu[1])*pm(mu[1]/(Lambda+mu[
1]))*(pm(mu[4]/(Lambda+mu[1]+mu[4]))/mu[4])^(1-fiab);
>
PS2:=(lambda[1]/(lambda[1]+lambda[2]))*(lambda[5]/(mu[1]+lambda[2]+lambda[3]+l
ambda[4]+lambda[5]+lambda[6]))*(lambda[6]/(mu[1]+mu[5]+lambda[2]+lambda[3]+lam

```

```

bda[4]+lambda[6]))/(mu[1]+mu[5]+mu[6]+lambda[2]+lambda[3]+lambda[4])^(1-fiab);
>
PS2M:=evalf((lambda[1]/(lambda[1]+lambda[2]))*(lambda[5]/mu[1])*(lambda[6]/mu[5])*pM(mu[5]/(mu[1]+mu[5]))*(pM(mu[6]/(mu[1]+mu[5]+mu[6]))/mu[6])^(1-fiab));
>
PS2m:=(lambda[1]/(lambda[1]+lambda[2]))*(lambda[5]/mu[1])*(lambda[6]/mu[5])*pm(mu[1]/(Lambda+mu[1]))*pm(mu[5]/(Lambda+mu[1]+mu[5]))*(pm(mu[6]/(Lambda+mu[1]+mu[5]+mu[6]))/mu[6])^(1-fiab);
>
PS3:=(lambda[2]/(lambda[1]+lambda[2]))*(lambda[3]/(mu[2]+lambda[1]+lambda[3]))*(lambda[4]/(mu[2]+mu[3]+lambda[1]+lambda[4]+lambda[5]+lambda[6]))/(mu[2]+mu[3]+mu[4]+lambda[1]+lambda[5]+lambda[6])^(1-fiab);
>
PS3M:=evalf((lambda[2]/(lambda[1]+lambda[2]))*(lambda[3]/mu[2])*(lambda[4]/mu[3])*pM(mu[3]/(mu[2]+mu[3]))*(pM(mu[4]/(mu[2]+mu[3]+mu[4]))/mu[4])^(1-fiab));
>
PS3m:=(lambda[2]/(lambda[1]+lambda[2]))*(lambda[3]/mu[2])*(lambda[4]/mu[3])*pm(mu[2]/(Lambda+mu[2]))*pm(mu[3]/(Lambda+mu[2]+mu[3]))*(pm(mu[4]/(Lambda+mu[2]+mu[3]+mu[4]))/mu[4])^(1-fiab);
>
PS4:=(lambda[2]/(lambda[1]+lambda[2]))*(lambda[3]/(mu[2]+lambda[1]+lambda[3]))*(lambda[5]/(mu[2]+mu[3]+lambda[1]+lambda[4]+lambda[5]+lambda[6]))*(lambda[6]/(mu[2]+mu[3]+mu[5]+lambda[1]+lambda[4]+lambda[6]))/(mu[2]+mu[3]+mu[5]+mu[6]+lambda[1]+lambda[4])^(1-fiab);
>
PS4M:=evalf((lambda[2]/(lambda[1]+lambda[2]))*(lambda[3]/mu[2])*(lambda[5]/mu[3])*(lambda[6]/mu[5])*pM(mu[2]/(mu[2]+mu[3]))*pM(mu[5]/(mu[2]+mu[3]+mu[5]))*(pM(mu[6]/(mu[2]+mu[3]+mu[5]+mu[6]))/mu[6])^(1-fiab));
>
PS4m:=(lambda[2]/(lambda[1]+lambda[2]))*(lambda[3]/mu[2])*(lambda[5]/mu[3])*(lambda[6]/mu[5])*pm(Lambda/(Lambda+mu[2]))*pm(mu[2]/(Lambda+mu[2]+mu[3]))*pm(mu[5]/(Lambda+mu[2]+mu[3]+mu[5]))*(pm(mu[6]/(Lambda+mu[2]+mu[3]+mu[5]+mu[6]))/mu[6])^(1-fiab);
>
SPS:=PS1+2*PS2+PS3+2*PS4;SPSM:=PS1M+2*PS2M+PS3M+2*PS4M;SPSm:=PS1m+2*PS2m+PS3m+2*PS4m;
> c1:=PS1/SPS;c2:=2*PS2/SPS;c3:=PS3/SPS;c4:=2*PS4/SPS;
>
Resseq:=(lambda[1]+lambda[2])*SPS*t^fiab;ResseqMf:=(lambda[1]+lambda[2])*SPSM*t^fiab;Resseqmf:=(lambda[1]+lambda[2])*SPSm*t^fiab;
>
Resexact;ResMTND:=ResMTND/Resexact;Resseq:=Resseq/Resexact;ResseqMf:=ResseqMf/Resexact;Resseqmf:=Resseqmf/Resexact;

```


Chapitre 10

Bibliographie

Bibliographie

- [1] J. ATKINSON et I. KOVALENKO – « A numerical investigation of the insensitivity of the unavailability of some redundant, repairable systems to the form of the lifetime distribution », *Second International Conference on Mathematical Methods in Reliability* (Bordeaux, France), Université Victor Segalen Bordeaux 2, 2000, p. 119–122.
- [2] T. AVEN et J. GÅSEMYR – « Asymptotic distributions for downtimes of monotone systems », *Journal of Applied Probability* **36** (1999), p. 814–825.
- [3] T. AVEN et U. JENSEN – *Stochastic models in reliability*, Applications of Mathematics, Stochastic Models and Applied Probability, Springer, New York, 1998.
- [4] R. E. BARLOW et F. PROSCHAN – *Mathematical theory of reliability*, Classics in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphie, 1996.
- [5] A. BECKER et P. NAIM (éds.) – *Les réseaux bayésiens*, Eyrolles, Paris, 2000.
- [6] S. BERSON, E. DE SOUZA E SILVA et R. R. MUNTZ – « A methodology for the specification and generation of Markov models », in *Numerical Solution of Markov chains* [48], p. 11–36.
- [7] A. BOBBIO et K. S. TRIVEDI – « An aggregation technique for the transient analysis of stiff Markov chains », *IEEE Transactions on Computers* **C-35** (1986), no. 9, p. 803–814.
- [8] J.-L. BON – *Fiabilité des systèmes*, Techniques Stochastiques, Masson, Paris, 1995.
- [9] J.-L. BON et J. BRETAGNOLLE – « Approximation de la fiabilité des grands systèmes avec réparation non-exponentielle », *ESAIM, Probability and Statistics* **3** (1999), p. 49–65.
- [10] J.-L. BON et J. COLLET – « An algorithm in order to implement reliability exponential approximations », *Reliability Engineering and System Safety* **43** (1994), p. 263–268.
- [11] M. BOUISSOU et E. BOURGADE – « Unavailability evaluation at the design stage for electric power plants : Methods and tools », *Proceedings of the Annual Reliability and Maintainability Symposium* (Philadelphia, USA), 1997.
- [12] CEI – « Vocabulaire électrotechnique international, chapitre 191 : sûreté de fonctionnement et qualité de service », Tech. Report CEI 60050-191, Commission Électrotechnique Internationale, 1990.
- [13] C. COCOZZA-THIVENT – *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*, SMAI, Springer, Berlin, 1997.
- [14] C. COCOZZA-THIVENT et M. ROUSSIGNOL – « Robustesse de quelques formules de fiabilité », Tech. Report 20, Université de Marne la Vallée, Équipe d'analyse et mathématiques appliquées, 1997.

- [15] J. COLLET – « Some remarks on rare-event approximation », *IEEE Trans. Reliability* **45** (1996), no. 1, p. 106–108.
- [16] J. COLLET et J.-L. BON – « L'utilisation des diagrammes de décision binaire pour le calcul de fiabilité », in Limnios et Rauzy [30], p. 1103–1114.
- [17] J. COLLET et A. LEROY – « Que savons-nous des temps de réparations ? », Tech. Report HT53/99/016/A, Électricité de France, 1999.
- [18] P.-J. COURTOIS et P. SEMAL – « Bounds for transient characteristics of large or infinite Markov chains », in *Numerical Solution of Markov chains* [48], p. 413–434.
- [19] EDF – « étude probabiliste de sûreté de la tranche 3 du centre nucléaire de production électrique de paluel (1300 mwe) », Tech. report, Électricité de France, 1990.
- [20] W. FELLER – *An introduction to probability theory and its applications*, deuxième éd., vol. 1, Wiley, New-York, 1957.
- [21] B. GENEDENKO, Y. BELIAEV et A. SOLOVIEV – *Méthodes mathématiques en théorie de la fiabilité*, Mir, Moscou, 1972.
- [22] P. GLASSERMAN et D. YAO – « Monotonicity in generalized semi-markov processes », *Mathematics of Operations Research* **17** (1992), no. 1, p. 1–21.
- [23] M. GONDRAN et D. PAGÈS – *Fiabilité des systèmes*, Eyrolles, Paris, 1980.
- [24] W. K. GRASSMANN – « Finding transient solutions in markovian event systems through randomization », in *Numerical Solution of Markov chains* [48], p. 373–384.
- [25] W. S. JUNG et D.-K. KIM – « Forte : A fast new algorithm for risk monitors and psa », *Proceedings of PSAM 4, International Conference on Probabilistic Safety Assessment and Management* (New-York, USA), 1998.
- [26] B. KLAR – « A class of test for exponentiality against HNBUE alternatives », *Statistics & Probability Letters* **47** (2000), p. 199–207.
- [27] B. KLEFSJÖ – « The HNBUE and HNWUE classes of life distributions », *Naval Research Logistics Quarterly* **29** (1982), no. 2, p. 331–344.
- [28] R. KLINE – « Suitability of the lognormal distribution for corrective maintenance repair times », *Reliability Engineering* **9** (1984), p. 65–80.
- [29] I. KOVALENKO – « Light traffic analysis of complex system reliability : Non-regenerative model », *Second International Conference on Mathematical Methods in Reliability* (Bordeaux, France), Université Victor Segalen Bordeaux 2, 2000, p. 634–637.
- [30] N. LIMNIOS et A. RAUZY (éds.) – *Binary decision diagrams and reliability*, RAIRO-API-JESA, n30/8, Paris, 1996.
- [31] N. LIMNIOS – *Arbres de défaillance*, Traité des Nouvelles Technologies, Hermès, Paris, 1991.
- [32] C. LINDEMANN et A. THÜMLER – « Transient analysis of deterministic and stochastic petri nets with concurrent deterministic transitions », *Performance Evaluation* **36–37** (1999), no. 1–4, p. 35–54.
- [33] A. LISNIANSKY, G. LEVITIN et H. BEN-HAIM – « Structure optimization of multi-state system with redundancy », *Reliability Engineering and System Safety* **67** (2000), no. 1, p. 103–112.

- [34] S. MAHÉVAS et G. RUBINO – « Bound computation of dependability and performance measures », *Publication IRISA* **1093** (1997).
- [35] M. MODARRES, M. KAMINSKIY et V. KRISTOV (éds.) – *Reliability engineering and risk analysis - a practical guide*, Marcel Dekker, New York, 1999.
- [36] H. NABLI et B. SERICOLA – « Performability analysis for degradable computer systems », *Publication IRISA* **2602** (1995).
- [37] Y. NIQUIL, J. SERET, M. GONDRAN et J. LALEUF – « Dimensionnement du stock de pièces à besoin exceptionnel, résolution du problème », Tech. Report HI23/98/029, Électricité de France, 1998.
- [38] P. PAMPHILE – « Calculs de la fiabilité de grands systèmes hautement fiables », Thèse de mathématiques appliquées, Université de Paris-Sud, Orsay, France, 1994.
- [39] O. POURRET – « L'approximation «lent-rapide» pour les processus de markov en fiabilité », Thèse de mathématiques appliquées, Université de Paris-Sud, Orsay, France, 1998.
- [40] O. POURRET, J. COLLET et J.-L. BON – « Evaluation of the unavailability of a multistate component system using a binary model », *Reliability Engineering and System Safety* **64** (1999), no. 1, p. 13–17.
- [41] E. PĂLTĂNEA – « Analyse de la fiabilité de grands systèmes réparables markoviens stratifiés », Thèse de mathématiques appliquées, Université de Paris-Sud, Orsay, France, 2000.
- [42] A. REIBMAN – « A splitting technique for Markov chain transient solution », in *Numerical Solution of Markov chains* [48], p. 373–384.
- [43] K. RUSSEL et D. RASMUSSEN – « Fault-tree reduction and quantification-an overview of IRRAS algorithms », *Reliability Engineering and System Safety* **40** (1993), no. 2, p. 149–164.
- [44] W. SCHNEEWEISS – *The fault-tree method*, LiLoLe Verlag GmbH, 2000.
- [45] D. SENGUPTA – « Another look at the moment bounds on reliability », *Journal of Applied Probability* **31** (1994), p. 777–787.
- [46] M. SHAKED et J. G. SHANTIKUMAR – *Stochastic orders and their applications*, Probability and Mathematical Statistics, Academic Press, San Diego, 1994.
- [47] A. SOLOVYEV et D. KONSTANT – « Reliability of a complex renewable system with an unbounded number of repair units », *Journal of Applied Probability* **28** (1990), p. 833–842.
- [48] W. J. STEWART (éd.) – *Numerical solution of markov chains*, Marcel Dekker, New York, 1991.
- [49] —, *Introduction to the numerical solution of markov chains*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994.
- [50] I. USHAKOV – « Reliability : Past, present and future », Recent Advances in Reliability Theory (N. Limnios et M. Nikulin, éds.), Birkhauser, Boston, 2000, p. 3–21.
- [51] S. VATON – « Modélisation statistique de trafic sur réseau local : application au contrôle dynamique de bande passante », Thèse d'informatique, École Nationale Supérieure des Télécommunications, Brest, France, 1998.

Chapitre 11

Notations

Nous donnons ici la liste des principales notations utilisées dans ce rapport, avec la page à laquelle elles sont définies.

$\leq_m, \leq_{\text{conv}}, \leq_{\text{st}}$ ordres en moyenne, convexe et stochastique, définis page **26**

\tilde{R} pseudo-variable de la variable R , définie page **31**

\mathcal{H}_m ensemble des variables aléatoires qui sont la pseudo-variable d'une variable aléatoire HNBUE de moyenne m , défini page **32**

\mathcal{C}_n séquence de panne enchaînant les défaillances des composants 1 à n , sans qu'aucune réparation ait pu avoir lieu à temps, définie page **47**

V_i temps de bon fonctionnement du composant i , c'est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ_i , défini page **47**

R_i temps de réparation du composant i , c'est une variable aléatoire de loi F_i , HNBUE de moyenne r_i , défini page **47**

\mathcal{E}_λ variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ , définie page **51**

\mathcal{U}_b variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, b]$, définie page **51**

$M(a, b)$ maximum de la probabilité $\mathbb{P}(X < Y)$, avec $X \in \mathcal{H}_a$ et $Y \in \mathcal{H}_a$, défini page **53**

$m(a, b)$ minimum de la probabilité $\mathbb{P}(X < Y)$, avec $X \in \mathcal{H}_a$ et $Y \in \mathcal{H}_a$, défini page **53**

\mathcal{F}_a^+ famille paramétrée de pseudo-variables permettant de maximiser la probabilité $\mathbb{P}(X < Y)$, définie page **55**

\mathcal{F}_a^- famille paramétrée de pseudo-variables permettant de minimiser la probabilité $\mathbb{P}(X < Y)$, définie page **56**

p valeur de $\mathbb{P}(X < Y)$ dans le cas markovien, définie page **57**

$p_M(p)$ fonction permettant de majorer la probabilité d'une séquence, définie page **58**

$p_m(p)$ fonction permettant de minorer la probabilité d'une séquence, définie page **61**

$P_m(t)$ minimum de $\mathbb{P}(t < X < Y)$, défini page **59**

\mathcal{V} ensembles des défaillances, défini page **77**

\mathcal{R} ensembles des réparations, défini page **77**

L ensemble des états lents, défini page **78**

R ensemble des états rapides, défini page **78**

\tilde{S} processus réduit, défini page **79**

La modélisation des durées de réparation pour les études de sûreté de fonctionnement

Résumé

Les notions de vieillissement ont souvent été utilisées pour caractériser les durées de vie des composants. Nous proposons ici de les appliquer aux durées de réparation de ces composants. En effet, ces durées ne sont souvent connues que par leur moyenne, leur loi étant inconnue en pratique : il est donc utile de la décrire de la manière la plus générale possible. Supposer ces durées vieillissantes est une hypothèse relativement naturelle dans de nombreux cas. De plus, sans cette hypothèse, des exemples montrent que ni la disponibilité ni la fiabilité ne peuvent être connues. Nous restreignons le calcul de la fiabilité et de la disponibilité au calcul de la probabilité de séquences menant d'un état de marche à un état de panne, ne comprenant pas de réparations réussies. Nous montrons que cette probabilité peut être encadrée à partir de la seule connaissance des taux de défaillance des composants, et de leur durée moyenne de réparation. De plus, ce calcul peut être mis en œuvre à l'aide de modèles markoviens. Des applications pratiques issues de problèmes industriels confirment la pertinence des encadrements obtenus.

Mots-clés : sûreté de fonctionnement, fiabilité, systèmes markoviens, inégalités stochastiques, vieillissement.

Classification AMS (1991) : 60K10, 60J20, 90B25, 62N05.

Repair times modeling for dependability studies

Summary

Hypotheses about aging have been widely used to characterize component life times. Here we propose to use these hypotheses for component repair times. Since we do not know the distribution of these times, but only their average, it is useful to characterize these distributions in a general way. Assuming these distributions as aging is well adapted in many cases. Furthermore, without this assumption, examples show that neither availability nor reliability can be computed. We reduce the computation of availability and reliability to the computation of the probability of sequences leading from a working state to a failure state, with no achieved repair. We show this probability can be bracketed based only on failure rates and mean repair times. Furthermore, this computation can be implemented using markovian models. Practical applications, derived from industrial problems, confirm these bracketings are useful.

Key-Words : dependability, reliability, markovian systems, stochastic inequalities, aging.

Discipline : Mathématiques Appliquées et Applications des Mathématiques

Université de Paris-Sud

Mathématiques

Bâtiment 425

Laboratoire de Modélisation Stochastique et Statistique - CNRS URA D0743

91405 ORSAY Cedex